Б.Г. Зив В.М. Мейлер

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

8 КЛАСС

13-е издание

Москва
"Просвещение"
2010

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
З-59

Зив Б. Г.

З-59 Геометрия. Дидактические материалы. 8 класс / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. — 13-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 159 с. : ил. — ISBN 978-5-09-024155-7.

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по курсу геометрии 8 класса, а также математические диктанты и задачи повышенной трудности. Оно ориентировано на учебник «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-024155-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии представлено 39 самостоятельных работ, 7 контрольных работ, 5 математических диктантов и задачи повышенной трудности.

Самостоятельные работы обозначены буквой **С** с соответствующим номером. Например, **С—2** — это вторая самостоятельная работа. Основная цель предлагаемых самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут использоваться для текущего контроля умений и навыков учащихся.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах.

В первом и втором вариантах каждой работы предлагаются задачи, для успешного решения которых учащиеся должны применить знания на уровне минимальных программных требований.

Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Решение этих задач предусматривает умение распознавать понятия в стандартных ситуациях, применять знания в стандартных условиях или при небольших отклонениях от них. Задачи третьего и четвертого вариантов по сложности примерно соответствуют большинству основных задач учебника.

Пятый и шестой варианты предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов требуется уметь применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать сложные нестандартные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. По сложности эти задачи примерно соответствуют разделу «Задачи повышенной трудности» учебника.

Задачи из седьмого и восьмого вариантов могут быть даны учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использованы в качестве необязательного задания для домашней работы, а также на занятиях математического кружка.

В пособии приведены две самостоятельные работы, отмеченные знаком *. Первый и второй варианты в этих работах имеют задачи, сложность которых несколько превосходит минимальные программные требования. Эти работы рекомендуется проводить в наиболее подготовленных классах.

Число самостоятельных работ в пособии явно избыточно. Учителю не следует стремиться обязательно выполнить с учащимися все задания каждой из работ. Предполагается, что представленный в пособии набор работ позволит педагогу на любом уроке отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Работы скомпонованы в пособии по вариантам.

Наличие восьми вариантов позволяет учителю один экземпляр книги разделить на восемь маленьких книг, каждая из которых дается отдельному ученику.

Контрольные работы обозначаются в пособии буквой **К** с соответствующим номером. Они предназначены для проведения итоговой проверки знаний по каждой из пяти глав учебника и по всему курсу геометрии VIII класса.

Контрольные работы составлены в четырех вариантах. Сложность всех вариантов работ примерно одинаковая.

В каждом варианте имеются два задания, отмеченные знаком °. Это задачи на уровне минимальных программных требований. Они составляют обязательную часть работы.

Далее приводятся три задания, которые проверяют дальнейшее математическое развитие учащихся. При этом последнее задание потребует творческого применения знаний, анализа нестандартных геометрических конфигураций, проведения достаточно сложных дедуктивных рассуждений. Это задание обозначено *.

Предполагается, что при проведении каждой из работ учитель определяет, какие из задач, не отмеченных знаком °, войдут в работу в зависимости от уровня подготовки учащихся и времени, отводимого на работу. Так, например, для работы **К—1** (на 45 мин) возможны следующие компоновки заданий:

— задания 1°, 2°, 3а или 1°, 2°, 3б в слабом классе;

— задания 1°, 2°, 3б, или 1°, 2°, 3б, 4*, или 1°, 2°, 3а, 3б, 4* в сильном классе.

При этом для получения отметки «3» достаточно выполнить задания 1°, 2°. Выполнение же заданий, не отмеченных знаком °, является необходимым условием для выставления отметок «4» и «5» или сразу двух отметок — основной и дополнительной.

Возможны и другие пути использования контрольных работ.

Математические диктанты предназначаются для систематизации теоретических знаний учащихся и могут предшествовать контрольной работе. Учитель предлагает вопрос или задачу, а ученик в течение нескольких минут должен дать на них ответ. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу можно отвести примерно 35 мин, после чего учитель вместе с классом проверяет ответы и обращает внимание класса на допущенные ошибки.

В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным и контрольным работам, а также указания и решения к наиболее сложным заданиям. Заметим, что предложенные решения не являются единственными. Существуют и другие решения многих задач, которые в пособии не изложены.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ПУНКТАМ УЧЕБНИКА

Работа	Тема	Пункт учебника
С—1	Многоугольник, четырехугольник	39—41
С—2	Параллелограмм и его свойства	42
С—3	Признаки параллелограмма	43
С—4	Трапеция	44
С—5	Задачи на построение параллелограмма и трапеции	42—44
С—6	Прямоугольник	45
С—7	Ромб и квадрат	46
С—8	Задачи на построение прямоугольника, ромба, квадрата	45, 46
С—9	Свойства площадей многоугольников, площадь квадрата и прямоугольника	48—50
С—10	Площадь параллелограмма	51
С—11	Площадь треугольника	52
С—12	Площадь трапеции	53
С—13	Теорема Пифагора	54, 55
С—14	Площади многоугольников	48—55
С—15	Пропорциональные отрезки	56
С—16	Определение подобных треугольников. Отношение площадей подобных треугольников	57, 58
С—17	Первый признак подобия треугольников	59
С—18	Второй и третий признаки подобия треугольников	60, 61
С—19	Средняя линия треугольника. Свойство медиан треугольника	62
С—20	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	63
С—21	Задачи на построение, решаемые методом подобия	64
С—22	Синус, косинус и тангенс острого угла треугольника и их значения для углов в 30°, 45° и 60°	66, 67
С—23	Решение прямоугольных треугольников	66, 67
С—24*	Подобие треугольников	58—67
С—25	Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности	68, 69
С—26	Теорема о вписанном угле	71
С—27	Теорема о произведении отрезков хорд	71
С—28*	Окружность	68—71
С—29	Четыре замечательные точки треугольника	72, 73
С—30	Вписанная окружность	74
С—31	Описанная окружность	75
С—32	Понятие вектора	76—78
С—33	Сложение векторов	77—81
С—34	Вычитание векторов	82
С—35	Умножение вектора на число	83
С—36	Применение векторов к решению задач	84
С—37	Средняя линия трапеции	85
С—38	Итоговое повторение (четырехугольники, площади, подобные треугольники)	
С—39	Итоговое повторение (окружность)	
К—1	Четырехугольники	39—47
К—2	Площадь	48—55
К—3	Подобные треугольники	56—61
К—4	Применение подобия, решение прямоугольных треугольников	62—67
К—5	Окружность	68—75
К—6	Векторы	76—84
К—7	Итоговое повторение	85

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

С—1

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ вершина B соединена равными диагоналями с двумя другими вершинами. Известно, что $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$. Докажите, что периметры четырехугольников $ABDE$ и $BEDC$ равны.
2. Дан выпуклый девятиугольник с равными углами. Найдите эти углы.

С—2

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC = 20$ см, $BD = 10$ см, $AB = 13$ см. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника COD.
2. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ с острым углом A проведен перпендикуляр BK к прямой AD; $BK = \frac{1}{2}AB$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

С—3

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. Докажите, что $BC = AD$.
2. Середина отрезка BD является центром окружности с диаметром AC, причем точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

С—4

1. В трапеции $ABCD$ BC — меньшее основание. На отрезке AD взята точка E так, что $BE \parallel CD$; $\angle ABE = 70°$, $\angle BEA = 50°$. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.

С—5

1. Постройте параллелограмм по большей стороне, меньшей диагонали и углу между ними.
2. Постройте прямоугольную трапецию по меньшему основанию и боковым сторонам.

С—6

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. E — середина стороны AB, $\angle BAC = 50°$. Найдите угол EOD.
2. Дана окружность с диаметрами AB и CD. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ является прямоугольником.

С—7

1. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 31°$. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника BOC.
2. На рисунке 1 четырехугольник $ABCD$ — квадрат, $AK = PD = EC = BM$. Докажите, что выпуклый четырехугольник $MEPK$ также является квадратом.

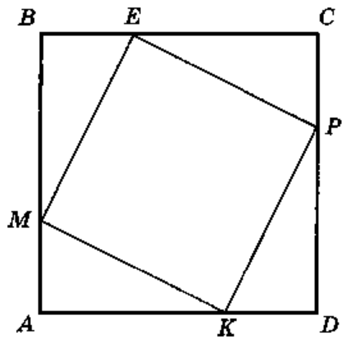

Рис. 1

С—8

1. Постройте прямоугольник по его стороне и периметру.
2. Дан отрезок, равный перпендикуляру, опущенному из вершины некоторого квадрата на диагональ. Постройте этот квадрат.

С—9

1. Составьте формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 2.
2. Периметр прямоугольника равен 26 см, а одна из его сторон 9 см. Найдите сторону квадрата, имеющего такую же площадь, как этот прямоугольник.

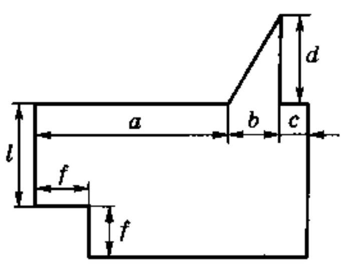

Рис. 2

С—10

1. В параллелограмме $ABCD$ угол B тупой. На продолжении стороны AD за вершину D отмечена точка E так, что $\angle ECD = 60°$, $\angle CED = 90°$, $AB = 4$ см, $AD = 10$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника $ABMK$ равна площади треугольника ACD.

С—11

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BD = 12$ см. Вершина B удалена от прямой AC на 4 см. Найдите площадь треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 135°$, $AC = 6$ дм, высота BD равна 2 дм. Найдите площадь треугольника ABD.

С—12

1. Периметр равнобедренной трапеции равен 32 см, боковая сторона 5 см, площадь 44 см^2. Найдите высоту трапеции.

2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 10 см и 8 см соответственно. Площадь треугольника ACD равна 30 см^2. Найдите площадь трапеции.

С—13

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см.

2. Определите углы треугольника со сторонами 1, $\sqrt{3}$, 2.

С—14

1. Перечертите фигуру, изображенную на рисунке 3. Проведите необходимые измерения и вычислите площадь этой фигуры.

2. На стороне AB квадрата $ABCD$, равной 12 см, отмечена точка M так, что $MC = 13$ см. Найдите площадь четырехугольника $AMCD$.

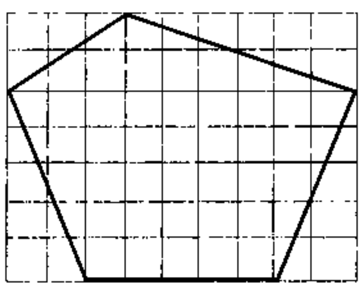

Рис. 3

С—15

1. Отрезки AB, CD и EF, MN пропорциональны друг другу. Найдите EF, если $AB = 5$ см, $CD = 80$ мм, $MN = 1$ дм.
2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CD — биссектриса. Найдите AB, AD, DB.

С—16

1. Треугольники ABC и DEF подобны. $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, $EF = 14$, $DF = 20$, $BC = 21$. Найдите AC.
2. Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 2 см. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

С—17

1. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E, а продолжение стороны DC — в точке F. Докажите, что $\triangle ABE \sim \triangle EFC$.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B_1 = \angle C$, $\angle B = \angle A_1$, $AC = 2$, $B_1C_1 = 4$, A_1C_1 больше AB на 2,2, $A_1B_1 = 2{,}8$. Найдите неизвестные стороны треугольников.

С—18

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.
2. Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 4, подобны, и выясните взаимное расположение прямых AB и DE.

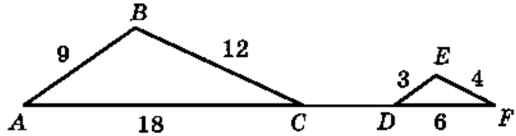

Рис. 4

С—19

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, K — середина стороны AB, $AK = 3$ см, $KO = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма. Сравните углы KOA и BCA.
2. В треугольнике ABC $AC = 12$ см. Через точку пересечения медиан проведена прямая DE ($D \in AB$, $E \in BC$), параллельная AC. Найдите DE.

С—20

1. В прямоугольном треугольнике ACB $(\angle C = 90°)$ $CD \perp AB$, $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$. Найдите отношение площадей треугольников ACD и CDB.

2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $BE \perp AD$, $BE = 6$ см, $AE = 3$ см. Найдите площадь параллелограмма.

С—21

1. Постройте треугольник ABC по данным углам A и C и медиане AM.

2. Данный отрезок разделите в отношении $2 : 3 : 5$.

С—22

1. В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 20, а боковая сторона 15. Найдите синус, косинус и тангенс острого угла трапеции.

2. В окружности AB и CD — два не взаимно перпендикулярных диаметра, $DE \perp AB$, $CD = 4$, $DE = \sqrt{3}$. Найдите острый угол между диаметрами.

С—23

1. В параллелограмме стороны равны a и b, острый угол α. Найдите площадь параллелограмма. Вычислите эту площадь, если $a = 2{,}3$, $b = 3{,}7$, $\alpha = 40°37'$.

2. В прямоугольном треугольнике ACB $(\angle C = 90°)$ $\angle BAC = 45°$, $AB = 10$, $D \in BC$ $(B—D—C)$, $\angle DAC = 30°$. Найдите DC.

С—24*

1. В прямоугольном треугольнике ACB $(\angle C = 90°)$ $AC = 4$, $BC = 6$, $E \in AB$ $(A—E—B)$, $EF \perp BC$, $ED \perp AC$; $EF : ED = 1 : 2$. Найдите площадь прямоугольника $DEFC$.

2. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 60°$, а высота равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. На продолжении стороны AB за точку B взята точка M, $BM = 4$. Отрезок MD пересекает BC в точке K. В каком отношении точка K делит отрезок BC?

С—25

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $AB = 10$, $\angle ABC = 30°$. С центром в точке A проведена окружность. Каким должен быть ее радиус, чтобы: а) окружность касалась прямой BC; б) не имела с ней общих точек; в) имела с ней две общие точки?

2. На касательной к окружности от точки касания по обе стороны от нее отмечены две точки M и T, удаленные от центра окружности на расстояние, равное 20 см; $TM = 32$ см. Найдите радиус окружности.

С—26

1. Дуга AB окружности с центром в точке O равна $60°$. Найдите расстояние от точки A до радиуса OB, если радиус окружности равен 6 см.

2. AB и AC — хорды окружности. $\angle BAC = 70°$, $\smile AB = 120°$. Найдите градусную меру дуги AC.

С—27

1. Через точку M, расположенную внутри круга, проведены две хорды AB и CD, причем $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Найдите AB.

2. AB — диаметр окружности. Точка C лежит на окружности. $CD \perp AB$, $AD = 3$, $DB = 5$. Найдите CD.

С—28*

1. Две окружности имеют общий центр. Радиус большей окружности равен R, а меньшей — r. Найдите длину хорды большей окружности, которая касается меньшей.

2. Две окружности имеют равные радиусы и пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, которая пересекает одну окружность в точке C, а другую — в точке D. Докажите, что $BC = BD$.

С—29

1. В остроугольном треугольнике ABC $AD \perp BC$, $CF \perp AB$, AD пересекает CF в точке M. Докажите, что $\angle ABM = \angle MCA$.

2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) AE — биссектриса, $CE = 5$, $AB = 14$. Найдите площадь треугольника ABE.

С—30

1. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если сторона треугольника равна $2\sqrt{3}$ см.
2. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 10 см. Найдите длину боковой стороны.

С—31

1. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность с радиусом $3\sqrt{3}$. Найдите его периметр.
2. В окружность, радиус которой равен 10, вписан прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 16. Найдите площадь этого треугольника.

С—32

$ABCD$ — параллелограмм. Укажите пары векторов, изображенных на рисунке 5, которые: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) равны. Можно ли на прямой AC от точки A отложить вектор, равный вектору $\vec{a}$?

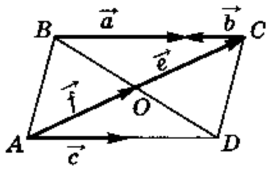

Рис. 5

С—33

1. На рисунке 6 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Постройте вектор $\vec{a}+\vec{c}$ двумя способами.
2. M, H, P, O, S — произвольные точки. Найдите сумму $\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{OS}$.

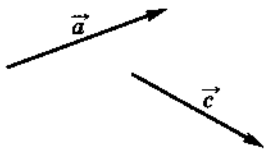

Рис. 6

С—34

1. На рисунке 7 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.
2. Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC точка M — середина основания AC. Найдите $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}|$, если $AB = 5$ см, $BM = 4$ см.

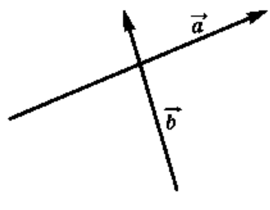

Рис. 7

С—35

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны CD. Выразите векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

С—36

1. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, M — середина AA_1. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
2. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. В каком отношении диагонали этого четырехугольника делятся точкой их пересечения?

С—37

1. Разность оснований трапеции равна 4 см, а средняя линия 10 см. Найдите основание трапеции.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проведенный из вершины B на большее основание AD трапеции, делит его на отрезки, равные 4 см и 10 см. Найдите основания и среднюю линию трапеции.

С—38

$ABCD$ — квадрат со стороной 4 см. На сторонах AB и CD отложены отрезки AM и KC так, что $AM = KC = 3$.

а) Докажите, что $MBKD$ — параллелограмм.
б) Найдите его периметр и площадь.

С—39

1. Через точку A, лежащую на окружности радиуса 10 см с центром O, проведена касательная AM. Отрезок OM пересекает окружность в точке B. Найдите градусную меру меньшей из дуг AB, если $AM = 10\sqrt{3}$ см.
2. Треугольник вписан в окружность так, что одна из его сторон проходит через центр окружности, а две другие удалены от него на 3 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности.

ВАРИАНТ 2

С—1

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = AF$. Из вершины A к двум несоседним вершинам проведены равные диагонали, причем $\angle BAC = \angle EAF$. Докажите, что периметры четырехугольников $ABCE$ и $ACEF$ равны.
2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 540°?

С—2

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей. Периметр треугольника AOD равен 25 см, $AC = 16$ см, $BD = 14$ см. Найдите BC.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. Из вершины B опущен перпендикуляр BK к прямой AD, $AK = BK$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

С—3

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEP$ все стороны равны, $\angle A = \angle D$. Докажите, что $BP \parallel CE$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении диагонали AC за вершины A и C отмечены точки A_1 и C_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1$. Докажите, что $\angle BA_1D = \angle BC_1D$.

С—4

1. В трапеции $MHPK$ MK — большее основание. Прямые MH и PK пересекаются в точке E, $\angle MEK = 80°$, $\angle EHP = 40°$. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°. Бо́льшая боковая сторона и большее основание равны по 20 см. Найдите меньшее основание.

С—5

1. Постройте параллелограмм по меньшей стороне, острому углу и углу между этой стороной и меньшей диагональю.
2. Постройте прямоугольную трапецию по меньшей диагонали, большему основанию и большей боковой стороне.

С—6

1. В прямоугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O. Отрезок OA является высотой треугольника MOP, $\angle AOP = 15°$. Найдите $\angle OHK$.

2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A диагонали пересекаются в точке O. На отрезках AO и OC взяты точки P и K соответственно, $OP = OD$, $OK = OB$. Докажите, что четырехугольник $PBKD$ является прямоугольником.

С—7

1. В ромбе $MPKH$ с тупым углом K диагонали пересекаются в точке E. Один из углов треугольника PKE равен $16°30'$. Найдите остальные углы этого треугольника и угол PMH.

2. На рисунке 8 четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$. Докажите, что выпуклый четырехугольник $MKHP$ является квадратом.

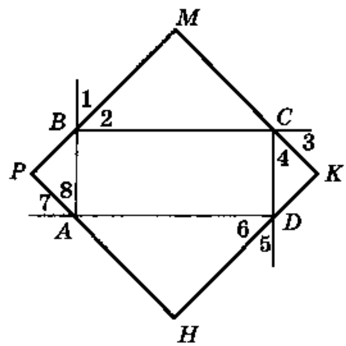

Рис. 8

С—8

1. Постройте ромб по тупому углу и меньшей диагонали.

2. Дан отрезок, равный перпендикуляру, проведенному из точки пересечения диагоналей некоторого квадрата на его сторону. Постройте этот квадрат.

С—9

1. Составьте формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 9.

2. Периметр квадрата равен 32 см, а одна сторона прямоугольника 4 см. Найдите другую сторону прямоугольника, если известно, что он имеет такую же площадь, как квадрат.

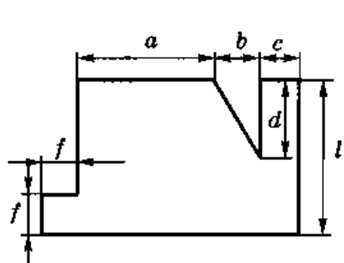

Рис. 9

С—10

1. В параллелограмме $MPKT$ на стороне MT отмечена точка E, $\angle PEM = 90°$, $\angle EPT = 45°$, $ME = 4$ см, $ET = 7$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M, P, K, T являются серединами сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Докажите, что площади четырехугольников $ABPT$ и $AMKD$ равны.

С—11

1. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см.

2. На стороне AC треугольника ABC с площадью 36 см^2 взята точка D, $AD : DC = 1 : 5$. Найдите площадь треугольника ABD.

С—12

1. В прямоугольной трапеции площадь равна 30 см^2, периметр 28 см, а меньшая боковая сторона 3 см. Найдите бóльшую боковую сторону.

2. В трапеции $MPKT$ меньшее основание PK равно 6 см, а высота трапеции 8 см. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника MKT равна 48 см^2.

С—13

1. Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 18 см, а бóльшая боковая сторона 15 см. Найдите площадь трапеции.

2. Определите углы треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$.

С—14

1. Перечертите фигуру, изображенную на рисунке 10. Проведите необходимые измерения и вычислите площадь этой фигуры.

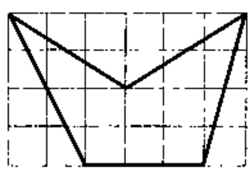

Рис. 10

2. На стороне PK прямоугольника $MPKH$ отмечена точка E, $ME = 15$ см, $PM = 12$ см, $EK = 6$ см. Найдите площадь четырехугольника $MEKH$.

С—15

1. Отрезки KP, MN и DO, AL пропорциональны друг другу. Найдите AL, если $KP = 8$ дм, $MN = 40$ см, $DO = 1$ м.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, AK — биссектриса. Найдите BC, BK, KC.

С—16

1. Треугольники KPF и EMT подобны, причем $\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$, $\angle F = 20°$, $\angle E = 40°$. Найдите остальные углы этих треугольников.

2. Две сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см. Площадь первого треугольника 8 см^2. Найдите площадь второго треугольника.

С—17

1. Через вершину C параллелограмма проведена прямая, пересекающая сторону AD в точке E, а продолжение стороны BA — в точке F. Докажите, что $\triangle ECD \sim \triangle FBC$.

2. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AC = 6$, $EF = 2$, $AB = 3{,}3$. Сторона DF меньше стороны BC на 3,2. Найдите неизвестные стороны треугольников.

С—18

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, M, N принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, AD, $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Докажите, что $\angle BEF = \angle NMD$.

2. Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 11, подобны, и выясните взаимное расположение прямых BC и DF.

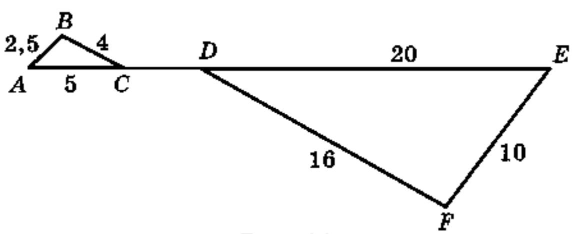

Рис. 11

С—19

1. В ромбе $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, E и F — середины сторон BC и DC. Докажите, что $EF = BO$ и $EF \perp AC$.
2. Через точку пересечения медиан треугольника MPK проведен отрезок CD, параллельный MK ($C \in MP$, $D \in PK$), $CD = 18$ см. Найдите MK.

С—20

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $CD \perp AB$, $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$. Найдите отношение площадей треугольников ADC и ACB.
2. $ABCD$ — прямоугольная трапеция ($\angle D = \angle C = 90°$), $BC = 3$, $CD = 6$, $BD \perp AB$. Найдите площадь трапеции.

С—21

1. Постройте треугольник ABC по данному углу C, отношению двух сторон $AC : CB = 2 : 3$ и биссектрисе CD.
2. Данный отрезок разделите в отношении $1 : 4 : 7$.

С—22

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $CD \perp AB$, $AD = 2$, $DB = 3$. Найдите синус, косинус и тангенс угла A.
2. $ABCD$ — прямоугольная трапеция ($\angle D = \angle C = 90°$), $BC = 2$, $AD = 4$, $CD = 2\sqrt{3}$. Найдите угол A.

С—23

1. Высота ромба равна h, острый угол α. Найдите площадь ромба. Вычислите эту площадь, если $h = 17{,}3$, $\alpha = 52°43'$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BD \perp AC$, $AD = 3$. Найдите BC.

С—24*

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $D \in AB$ ($A—D—B$), $DE \perp BC$, $DE = 3$, $DC = 5$, $AC = 2BC$. Найдите площадь треугольника ABC.
2. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ и составляет со стороной AD угол в $30°$. Сторона AD продолжена за точку D на отрезок DE, равный 3. Отрезок BE пересекает сторону CD в точке K. В каком отношении отрезок BE делит сторону CD?

С—25

1. $ABCD$ — квадрат, $AC = 10\sqrt{2}$, O — середина AD. С центром в точке O проведена окружность. Каким должен быть ее радиус, чтобы окружность: а) касалась прямых AB и CD; б) не имела с ними общих точек; в) имела бы две общие точки с каждой прямой?

2. На касательной к окружности от точки касания C отложены по обе стороны от нее два отрезка CA и CB, причем $\angle AOC = \angle BOC$ (O — центр окружности). Радиус окружности равен 8, $AB = 30$. Найдите расстояние от центра окружности до точек A и B.

С—26

1. В окружности с центром в точке O проведены два радиуса OA и OB так, что расстояние от точки A до радиуса OB в два раза меньше длины радиуса. Найдите градусную меру дуги AB.

2. В окружности проведены диаметр AB и хорда AC. Найдите угол BAC, если градусные меры дуг AC и CB относятся как 7 : 2.

С—27

1. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. $AE : EB = 1 : 3$, $CD = 20$, $DE = 5$. Найдите AB.

2. AB — диаметр окружности. Точка E лежит на окружности. $EF \perp AB$, $FB = 4$, $EF = 6$. Найдите радиус окружности.

С—28*

1. AB — диаметр окружности с центром в точке O. На отрезке OB как на диаметре построена окружность радиуса r. Из точки A проведена касательная AK к меньшей окружности (K — точка касания). Найдите AK.

2. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. $\smile BC = \smile AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

С—29

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) p — серединный перпендикуляр к AB, p пересекает AC в точке K, $AK = 5$, $BC = 4$. Найдите периметр треугольника BKC.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, медианы AE и CF пересекаются в точке K, $BK = 6$, $AC = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—30

1. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $\sqrt{3}$ см. Найдите сторону треугольника.
2. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция, угол при основании которой равен 30°. Высота трапеции равна 4 см. Найдите сумму длин оснований трапеции.

С—31

1. Треугольник ABC вписан в окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$ см, а центр окружности удален от этой стороны на 5 см.
2. Найдите периметр прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса 7,5 см, если один из катетов равен 9 см.

С—32

$ABCD$ — параллелограмм. Укажите пары векторов, изображенных на рисунке 12, которые:

а) коллинеарны;

б) сонаправлены;

в) противоположно направлены;

г) имеют равные длины.

Можно ли на прямой AB от точки B отложить вектор, равный вектору $\vec{e}$?

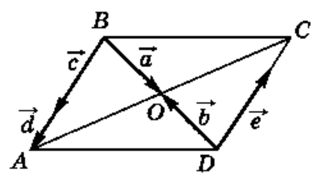

Рис. 12

С—33

1. На рисунке 13 изображены два вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $\vec{m}+\vec{n}$ двумя способами.

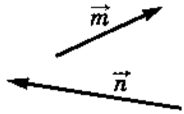

Рис. 13

2. Даны произвольные точки A, B, C, D, E. Докажите, что
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.

С—34

1. На рисунке 14 изображены векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$. Постройте вектор $\vec{d}-\vec{c}$.

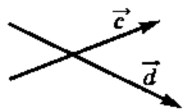

Рис. 14

2. Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BA}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.
3. CM — медиана равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины C прямого угла. Найдите $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}|$, если $AB = 10$.

С—35

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $3\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ P — точка пересечения диагоналей, M — середина BC. Выразите векторы $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{m}$.

С—36

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, K — середина BO. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{p}$.
2. Даны четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка O. Известно, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}$, $\angle A = 15°$. Найдите остальные углы этого четырехугольника.

С—37

1. В трапеции одно из оснований больше другого в два раза. Средняя линия трапеции равна 15 см. Найдите основания трапеции.
2. В равнобедренной трапеции $MHKP$ проведен перпендикуляр HE к большему основанию MP, $ME = 6$ см, $HK = 10$ см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

С—38

В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = 40°$, $\angle DCK = 50°$. Известно, что $CK = 8$ см, $BC = 20$ см.

а) Докажите, что $BM : CD = AM : KC$.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите отрезки KD, CD, BM и площадь четырехугольника $AMCK$.

С—39

1. Отрезок AB — диаметр некоторой окружности радиуса 5 см, прямая BC — касательная к ней, $AC = 10\sqrt{2}$ см.

   Найдите градусную меру дуги данной окружности, заключенной внутри треугольника ABC.
2. В треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$, вписана окружность с центром O. Найдите отрезки, на которые точка касания этой окружности и прямой AC делит сторону AC, если $OC = 5$ дм и $AO = 3\sqrt{2}$ дм.

ВАРИАНТ 3

С—1

1. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

2. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от числа сторон многоугольника.

С—2

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $AB \parallel CD$. На сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $BM = KD$. Докажите, что точки M и K находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения диагоналей четырехугольника.

2. На сторонах PK и MH параллелограмма $MPKH$ взяты точки A и B соответственно, $MP = PB = AK$, $\angle MPB = 60°$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки BM и AH.

С—3

1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AB и BC — точки M и P соответственно, причем $PK = MB$, $\angle KPC = 80°$, $\angle C = 50°$. Докажите, что $\angle KMB + \angle MBP = 180°$.

2. Внутри треугольника ABC отмечена точка M, а на сторонах AB и AC — точки K и H соответственно так, что отрезки AM и KH имеют общую середину, а $\angle KMH = \angle C$. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным.

С—4

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с боковой стороной угол в $120°$. Боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции острый угол и угол, который составляет меньшая диагональ с меньшим основанием, равны по $60°$. Найдите отношение оснований.

С—5

1. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и большей стороне.
2. Постройте равнобедренную трапецию по боковой стороне, большему основанию и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими основания трапеции.

С—6

1. В прямоугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, BH и DE — высоты треугольников ABO и COD соответственно, $\angle BOH = 60°$, $AH = 5$ см. Найдите OE.
2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O; $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle BAC = \angle DCA$. Найдите $\angle ABC$.

С—7

1. В ромбе $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, OM, OK, OE — перпендикуляры, опущенные на стороны AB, BC, CD соответственно. Докажите, что $OM = OK$, и найдите сумму углов MOB и COE.
2. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $AB = BC$. На сторонах AB и BC взяты точки M и P, а на стороне AC — точки K и H так, что четырехугольник $MPHK$ является квадратом, $MP = a$. Пайдите AC.

С—8

1. Постройте прямоугольник по диагонали и углу, который эта диагональ образует со стороной.
2. Внутри данного острого угла постройте квадрат с данной стороной так, чтобы две вершины квадрата принадлежали одной стороне угла, а третья — другой.

С—9

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка M. Докажите, что площадь параллелограмма вдвое больше площади треугольника AMD.
2. На продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ за вершину A взята точка M, $MC = 20$ дм, $\angle CMD = 30°$. Найдите площадь квадрата.

С—10

1. Найдите углы параллелограмма, если его площадь равна 20 см^2, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит одну из сторон на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины острого угла.

2. Сравните площади параллелограмма и прямоугольника, если они имеют одинаковые основания и одинаковые периметры.

С—11

1. В треугольнике ABC $\angle B = 130°$, $AB = a$, $BC = b$, а в параллелограмме $MPKH$ $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50°$. Найдите отношение площади треугольника к площади параллелограмма.

2. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина медианы CH, проведенной к гипотенузе AB, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите площадь треугольника OBC.

С—12

1. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 3 дм и составляет с меньшей диагональю угол в 45°. Острый угол трапеции также равен 45°. Найдите площадь трапеции.

2. Высоты, проведенные из вершин меньшего основания равнобедренной трапеции, делят большее основание на три отрезка, сумма двух из которых равна третьему. Найдите площадь этой трапеции, если ее меньшее основание и высота равны по 6 см.

С—13

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции 24 см, меньшее основание 7 см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите $\angle ABC$.

С—14

1. Ученику надо было вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 15. В его распоряжении оказалась только масштабная линейка. После измерений ученик установил, что $AB = PE = 3$ см, $AP = BE = 4$ см, $AE = 5$ см, $BC = 1$ см, $DC = 12$ см, $DE = 13$ см и точки C, B, E лежат на одной прямой. Может ли ученик, пользуясь этими результатами измерений, вычислить площадь? Чему равно ее значение?

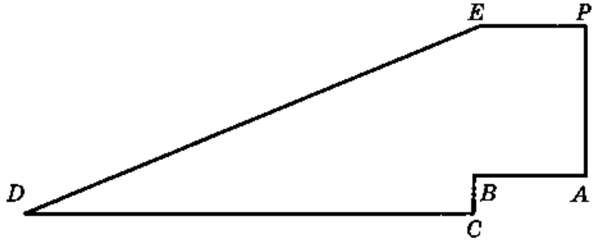

Рис. 15

2. В равнобедренной трапеции диагональ, меньшее основание и высота равны $\sqrt{35}$ см, 3 см и $\sqrt{10}$ см соответственно. Найдите площадь трапеции.

С—15

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $CD = 10$ см. Найдите периметр параллелограмма, если $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$.
2. В равнобедренном треугольнике основание меньше боковой стороны на 9,6 см, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, которые относятся как 3 : 5. Найдите периметр треугольника.

С—16

1. На рисунке 16 $\triangle BEC \sim \triangle ABC$, $AE = 16$ см, $CE = 9$ см. Углы ABC и BEC тупые. Найдите BC.
2. Периметры подобных треугольников относятся как 2 : 3, сумма их площадей равна 260 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

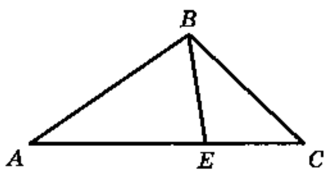

Рис. 16

С—17

1. В треугольнике ABC через точку P, лежащую на стороне BC, проведены прямые, пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках Q и R и параллельные AC и AB. Докажите, что $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD относятся как $1 : 9$. Сумма оснований BC и AD равна 4,8 см. Найдите основания трапеции.

С—18

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BD и B_1D_1 — медианы, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. Докажите, что треугольник BDC подобен треугольнику $B_1D_1C_1$.
2. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 9$. Точка E лежит на стороне BC. Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 1\frac{7}{9}$, $ME = 2\frac{2}{3}$, $CE = 2$. Докажите, что $ME \parallel AC$.

С—19

1. Четырехугольники $ABCD$ и $DCEF$ имеют общую сторону CD. Точки A, D, F не лежат на одной прямой, $AB = CD = EF$, $AB \parallel CD \parallel EF$. Диагонали четырехугольников $ABCD$ и $DCEF$ пересекаются соответственно в точках O_1 и O_2. Докажите, что $AF \parallel O_1O_2$ и $AF = 2O_1O_2$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Медианы треугольника пересекаются в точке O, $OA = 5$, $OB = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—20

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD, $DE \perp BC$, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$. Площадь треугольника DEC равна 20 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.
2. $ABCD$ — прямоугольник. $AB = 4$, $BC = 6$, $BE \perp AC$. Через точку E проведена прямая, параллельная AD, до пересечения в точке F со стороной CD. Найдите EF.

С—21

1. Постройте треугольник ABC по тупому углу B, отношению сторон $AB : BC = 3 : 2$ и высоте AD.

2. Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок $x = \frac{a^2}{b}$.

С—22

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = \angle C = 90°$, AC и BD — основания) $AB = 9$, $BD = 12$, $AD = 15$. Найдите синус, косинус и тангенс угла CBD.

2. В трапеции $ABCD$ $AD = 2BC$, $BD = 3\sqrt{3}$, $AC = 3$, $BD \perp AC$. Найдите углы, которые образуют с основанием диагонали трапеции.

С—23

1. В ромбе $ABCD$ острый угол равен α. Меньшая диагональ равна d. Найдите площадь ромба. Вычислите площадь, если $d = 12{,}3$, $\alpha = 62°50'$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) точка M лежит на катете BC. Эта точка находится на равном расстоянии от AB и AC, $MC = 2{,}7$, $AM = 4{,}1$. Найдите углы треугольника ABC.

С—24*

1. В равнобедренный треугольник вписан прямоугольник, стороны которого относятся как $1 : 3$. Меньшая сторона прямоугольника лежит на основании треугольника, а две его вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Стороны треугольника равны 10, 10, 12. Найдите площадь прямоугольника.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

С—25

1. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности. Хорда CB продолжена за точку B на отрезок BE, равный CB. Каково взаимное расположение прямой DE и окружности?

2. Диаметр AB окружности продолжен за точку B на отрезок BC, CD — касательная к окружности (D — точка касания). Через точку B проведена хорда, параллельная CD. Радиус окружности равен 10 см, а расстояние от центра окружности до хорды равно 4 см. Найдите AC.

С—26

1. MA и MB — хорды окружности с центром в точке O, $\angle AMB = 30°$. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен 10 см.

2. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D; $BD = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите CD.

С—27

1. Диаметр CD окружности перпендикулярен хорде AB, AB и CD пересекаются в точке E, $CE = 2$ см. Сумма AB и CE равна диаметру окружности. Найдите радиус окружности.

2. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, средний пропорциональный между отрезками, длины которых равны 1 см и 2 см.

С—28*

1. Две окружности, радиусы которых равны 8 см и 2 см, касаются внешним образом. Найдите длину их общей касательной.

2. Точка D лежит на радиусе OA окружности с центром в точке O. Хорда BC, проходящая через точку D, перпендикулярна AO. В точке C к окружности проведена касательная до пересечения с продолжением OA в точке E. Докажите, что CA — биссектриса угла BCE.

С—29

1. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке M, $BM = m$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние от точки M до стороны AC.

2. Высоты AD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, $OA = 4$, $OD = 3$, $BD = 4$. Найдите расстояние от точки O до стороны AC.

С—30

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.

2. Периметр ромба равен 80 см, а одна из диагоналей 32 см. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

С—31

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром этой окружности, $\angle ABC = 130°$, $\angle BCD = 140°$. Найдите углы BAD, CDA, ACB.

С—32

1. ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), $\angle A = 45°$. Какие из следующих записей имеют смысл:
   а) $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{BC}$;
   б) $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{BC}|$;
   в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
   г) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$?

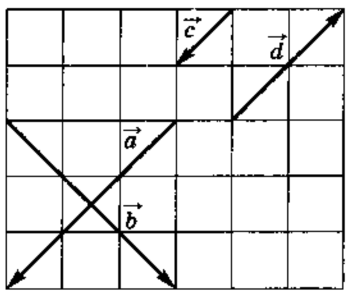

Рис. 17

2. Какие из векторов, изображенных на рисунке 17:
   а) коллинеарны;
   б) сонаправлены;
   в) противоположно направлены;
   г) имеют равные длины?

   Отложите эти векторы от одной точки.

С—33

1. На рисунке 18 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$.
   1) Постройте сумму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. 2) Постройте сумму $\vec{m}+\vec{n}$.

Рис. 18

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$.

С—34

1. На рисунке 19 изображены векторы $\vec{p}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$.
   1) Постройте вектор $\vec{p}-\vec{k}+\vec{m}$.
   2) Постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

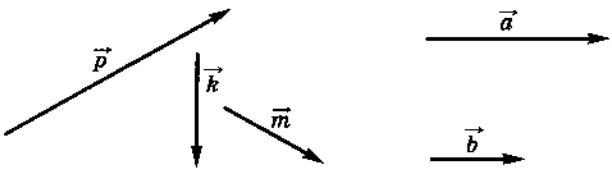

Рис. 19

2. В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.
3. В прямоугольнике $ABCD$ $AD=12$, $CD=5$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{OD}|$.

С—35

1. Дан треугольник ABC. Постройте вектор
$$-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$
2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $BK : KC = 1 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{k}$.

С—36

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и H так, что $AB = 3BM$, $BC = 3BH$. Используя векторы, докажите, что $MH \parallel AC$ и $MH = \frac{1}{3} AC$.

2. E и F — середины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

С—37

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, $AB = 2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагональ перпендикулярна к боковой стороне.

2. В равнобедренной трапеции острые углы равны по $60°$, боковая сторона равна 10 см, а большее основание 15 см. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции.

С—38

$ABCD$ — прямоугольник. $AB = 8$ см, $BC = 4$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки K и P соответственно так, что $AK : AB = CP : CD = 3 : 8$.

а) Докажите, что $KBPD$ — ромб.

б) Найдите его периметр и площадь.

С—39

1. Через концы хорды AB окружности с центром O проведены касательные, пересекающиеся в точке M. Найдите градусную меру меньшей из дуг AB, если $AM = 10$ см, а периметр четырехугольника $OAMB$ равен 40 см.

2. Диагональ трапеции составляет с большим основанием угол в $30°$, а центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит этому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 2 см.

ВАРИАНТ 4

С—1

1. Диагональ AC невыпуклого четырехугольника $ABCD$ разделяет этот четырехугольник на два треугольника, причем $AB > BC$, $AB = AD$, $BC = CD$, а прямые, содержащие диагонали четырехугольника, пересекаются в точке O. Сравните периметры пятиугольников $BCODA$ и $DCOBA$.

2. Докажите, что разность сумм углов выпуклых n-угольника и $(n-1)$-угольника не зависит от n.

С—2

1. В четырехугольнике $MPKH$ $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны PK и MH в точках A и B соответственно. Докажите, что $AP = HB$.

2. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K, $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30°$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки AM и CK.

С—3

1. В треугольнике MPK $\angle M = 65°$. На сторонах MK, MP, PK отмечены точки A, B, C соответственно так, что середина стороны PK — точка C, $AM = KC$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50°$. Докажите, что $\angle CPB + \angle ABP = 180°$.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На сторонах AB, BC, AC отмечены точки D, E, P соответственно так, что отрезки AE и DP имеют общую середину. Докажите, что $\angle DEP = \angle BCA$.

С—4

1. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, острый угол равен 45°. Найдите отношение оснований.

С—5

1. Постройте параллелограмм по меньшей диагонали, меньшему углу между диагоналями и углу между меньшей диагональю и меньшей стороной.

2. Постройте равнобедренную трапецию по диагонали, большему основанию и перпендикуляру, проведенному из вершины тупого угла к прямой, содержащей большее основание трапеции.

С—6

1. В прямоугольнике $MPKH$ O — точка пересечения диагоналей, PA и HB — перпендикуляры, проведенные из вершин P и H к прямой MK. Известно, что $MA = OB$. Найдите угол POM.

2. В четырехугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle OMH = \angle OHM$, $PH = MK$, $PK = MH$. Найдите угол MHK.

С—7

1. В ромбе $MPHK$ диагонали пересекаются в точке O. На сторонах MK, KH, PH взяты точки A, B, C соответственно, $AK = KB = PC$. Докажите, что $OA = OB$, и найдите сумму углов POC и MOA.

2. В треугольнике MPK $\angle M = 90°$, $MP = MK$. На сторонах MP, PK, MK отмечены точки A, B, C соответственно так, что четырехугольник $MABC$ является квадратом, $AC = a$. Найдите PK.

С—8

1. Постройте ромб по диагонали и углу, который образует другая диагональ со стороной.

2. Постройте квадрат по данной диагонали так, чтобы две противоположные вершины этого квадрата лежали на разных сторонах данного острого угла.

С—9

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Через середину стороны CD и вершину B проведена прямая, пересекающая луч AD в точке E. Докажите, что площадь трапеции равна площади треугольника ABE.

2. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону AD в точке K, $AK = 5$ см, $KD = 7$ см. Найдите площадь прямоугольника.

С—10

1. Найдите углы параллелограмма, если его площадь равна 40 см^2, а стороны 10 см и 8 см.

2. Сравните площади квадрата и параллелограмма, если они имеют одинаковые параметры и сторона квадрата равна высоте параллелограмма. (Параллелограмм не является прямоугольником.)

С—11

1. В треугольнике ABC $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15°$, а в треугольнике MPK $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165°$. Сравните площади этих треугольников.

2. В ромбе $ABCD$ диагонали равны 5 см и 12 см. На диагонали AC взята точка M так, что $AM : MC = 4 : 1$. Найдите площадь треугольника AMD.

С—12

1. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 4 см и составляет с меньшей диагональю угол в 45°. Найдите площадь трапеции, если ее тупой угол равен 135°.

2. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла и делящая большее основание на два отрезка, один из которых равен половине меньшего основания, равна 6 см. Большее основание превосходит меньшее на 2 см. Найдите площадь трапеции.

С—13

1. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Бóльшая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.
2. В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.

С—14

1. Ученику необходимо было вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 20. В его распоряжении была только масштабная линейка. В результате измерений установлено, что $MP = HT = 4$ см, $MT = PH = 3$ см, $MH = 5$ см, $PK = 5$ см, $KE = 12$ см. Точки P, H, E лежат на одной прямой. Мог ли ученик вычислить площадь по этим результатам? Чему эта площадь равна?

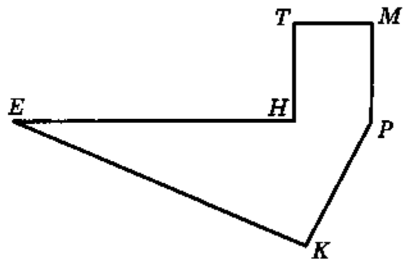

Рис. 20

2. Меньшая высота параллелограмма равна 4 см и делит бóльшую сторону на отрезки, каждый из которых равен по 3 см. Найдите бóльшую высоту параллелограмма.

С—15

1. В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC. Площади треугольников ABK и KBC относятся как $1 : 3$, $BC = 10$ см. Найдите AC, если $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$.
2. Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника.

С—16

1. На рисунке 21 треугольники ABC и DEC подобны, причем $DE \nparallel AB$, $AD = 3$ см, $DC = 5$ см, $BC = 7$ см. Найдите CE.

2. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дм. Найдите периметр каждого треугольника.

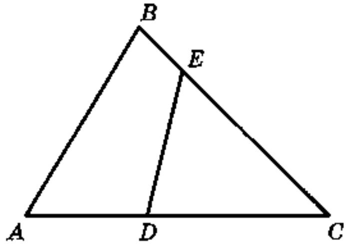

Рис. 21

С—17

1. На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E. KE пересекает сторону BC в точке M, а сторону AD — в точке F. Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как $2 : 3$, $AC = 20$. Найдите длины отрезков AO и OC.

С—18

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BE и B_1E_1 — биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AE}{EC} = \frac{A_1E_1}{E_1C_1}$. Докажите, что $\triangle ABE \sim \triangle A_1B_1E_1$.

2. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. Точка E лежит на стороне AB. Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5\frac{1}{4}$, $ME = 4\frac{1}{2}$, $AE = 1$. Прямая BM пересекает AC в точке P. Докажите, что треугольник APB равнобедренный.

С—19

1. $ABCD$ — параллелограмм. От вершин A и B на сторонах AD и BC отложены равные отрезки AQ и BP, E и F — точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABPQ$ и $QPCD$. Докажите, что $EF \parallel BC$ и $EF = \frac{1}{2}BC$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $BC = 9$. Медианы треугольника пересекаются в точке O, $OB = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—20

1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $AC : BD = 3 : 2$, $OE \perp AB$. Площадь треугольника AEO равна 27 см^2. Найдите площадь ромба.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = CB$) BD — биссектриса, $DE \perp AB$, $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{9}$, $BD + AC = 14$. Найдите периметр треугольника ABC.

С—21

1. Постройте треугольник ABC по углу A, отношению сторон $AB : AC = 1 : 3$ и расстоянию от точки пересечения медиан до вершины B.

2. Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок $x = \frac{(a+b)b}{a}$.

С—22

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = 12$, $BD = 16$, $AD = 20$, $CE \perp BD$. Найдите синус, косинус и тангенс угла BCE.

2. Площадь ромба равна $4\sqrt{2}$, а его сторона $2\sqrt{2}$. Найдите углы ромба.

С—23

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 2a$, $BC = a$, $BD \perp AB$, $\angle CBD = \alpha$. Найдите площадь трапеции. Вычислите площадь, если $a = 7{,}6$, $\alpha = 54°21'$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) CD — медиана. Найдите угол DCB, если $CD = 5{,}3$, $BC = 4{,}7$.

С—24*

1. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан равнобедренный прямоугольный треугольник так, что вершина прямого угла лежит на основании данного треугольника, а гипотенуза параллельна основанию (вершины острых углов лежат на боковых сторонах треугольника). Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота $BF = 16$ см, а $AB = 20$ см.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) BD — биссектриса. Площади треугольников ABD и BCD относятся как 17 : 8. Найдите синус угла ABC.

С—25

1. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 3$, $BC = 4$. С центром в точке C проведена окружность радиуса, равного 2,4. Каково взаимное расположение этой окружности и прямой AB?

2. На касательной к окружности от точки касания P по обе стороны от нее отложены два отрезка PA и PB. Точки A и B соединены отрезками с центром окружности O. AO пересекает окружность в точке C, а BO — в точке D. Найдите CD, если радиус окружности равен 7, а $OA = OB = 25$.

С—26

1. KA и KB — хорды окружности с центром в точке O, $\angle AKB = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$. Найдите длину радиуса этой окружности.

2. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB$. На стороне AC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке D; $CD = 18$, $AD = 16$. Найдите площадь треугольника.

С—27

1. Диаметр CD окружности с центром в точке O пересекается с хордой AB в точке K, $OK = 5$ см. Расстояние от центра окружности до хорды равно 4 см. Найдите радиус окружности, если длина хорды равна 16 см.

2. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{2 \cdot 3}$ см.

С—28*

1. Две окружности, радиусы которых 4 и 6, касаются внешним образом. Их общие внешние касательные пересекаются в точке M. Найдите расстояние от точки M до центра меньшей из окружностей.

2. В окружности проведены хорды AB и AC, DE и DF, причем $AB \parallel DE$ и $AC \parallel DF$. Докажите, что $FB \parallel CE$.

С—29

1. В остроугольном треугольнике ABC h и p — серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC. Они пересекаются в точке F, $CF = 10$, $AB = 16$. Пайдите расстояние от точки F до стороны AB.

2. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, $\angle A = 2\angle B$. Биссектрисы AF и CE пересекаются в точке O, AO пересекает окружность в точке K. Докажите, что $KC \parallel AB$.

С—30

1. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка ее касания с гипотенузой делит ее на части, равные 6 см и 4 см. Найдите радиус окружности.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если ее основания равны 8 см и 2 см.

С—31

1. Основание тупоугольного равнобедренного треугольника равно 24 см, а радиус описанной около него окружности 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

2. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$ см. Высоты треугольника AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что вокруг четырехугольника $MDCE$ можно описать окружность, и найдите ее радиус.

С—32

1. $ABCD$ — прямоугольник. Какие из следующих записей имеют смысл:
   а) $\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AC}$;
   б) $|\overrightarrow{AD}| < |\overrightarrow{AC}|$;
   в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;
   г) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$?

2. Какие из векторов, изображенных на рисунке 22:
   а) коллинеарны;
   б) сонаправлены;
   в) противоположно направлены;
   г) имеют равные длины?
   Отложите эти векторы от одной точки.

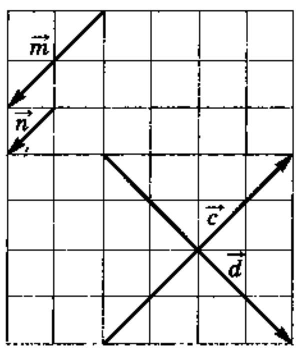

Рис. 22

С—33

1. На рисунке 23 изображены векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$.
   1) Постройте сумму $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$. 2) Постройте сумму $\vec{a}+\vec{b}$.

Рис. 23

2. $ABCD$ — прямоугольник. Диагонали его пересекаются в точке O. Докажите, что $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}|$.

С—34

1. На рисунке 24 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$.
   1) Постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$. 2) Постройте вектор $\vec{n}-\vec{m}$.

Рис. 24

2. В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{d}$. Выразите векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$.
3. В ромбе $ABCD$ $AD=20$, $BD=24$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$.

С—35

1. Дан треугольник ABC. Постройте вектор

$$-3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right).$$

2. На стороне HK ромба $MHKC$ взята точка E так, что $KE=\frac{1}{5}HE$, T — середина стороны MH. Выразите векторы $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\overrightarrow{CK}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{CM}=\vec{a}$.

С—36

1. Отрезки BA и CD пересекаются в точке O, причем $AO = 2OB$ и $OD = 2OC$. Используя векторы, докажите, что $BC \parallel AD$ и $BC = \frac{1}{2} AD$.

2. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — середины соответственно сторон BC, AC, AB. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, где O — произвольная точка плоскости.

С—37

1. В трапеции $MHKP$ (MP и HK — основания) $\angle M = 90°$, $\angle K = 150°$, $HK = 2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что ее диагональ перпендикулярна к боковой стороне.

2. В равнобедренной трапеции острые углы равны по 45°, меньшее основание равно 5 см, а высота трапеции 4 см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

С—38

В прямоугольнике $ABCD$ точка M делит сторону AB в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Прямые MD и BC пересекаются в точке E, $\angle MDA = 40°$, $AD = 10$ см.

а) Докажите, что треугольники AMD и ECD подобны.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника DCE.

С—39

1. AB и AD — две касательные к некоторой окружности радиуса 5 см (B и D — точки касания). Точка C принадлежит большей из дуг BD. Найдите $\angle BCD$, если $AB = 5$ см.

2. В некоторой трапеции один из углов прямой, а другой равен 30°. Бóльшая боковая сторона трапеции равна 12 см. Найдите площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

С—1

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны. Бо́льшая диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне BC, $\angle BAD = \angle CDA$. Сравните периметры пятиугольников $ABDEF$ и $ACDEF$.
2. Сумма углов выпуклого $2n$-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого n-угольника, где k — нечетное число. Найдите k.

С—2

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках M и K соответственно; $\angle BOM = 90°$. Докажите, что $BK = BM$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и H соответственно так, что отрезки BH и MD пересекаются в точке O; $\angle BHD = 95°$, $\angle DMC = 90°$, $\angle BOD = 155°$. Найдите отношение длин отрезков AB и MD и углы параллелограмма.

С—3

1. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC. Через вершину C вне треугольника проведена прямая, параллельная AB и пересекающая луч MK в точке E. Докажите, что $KE = \frac{1}{2}AC$.
2. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно взяты точки M и K так, что пары отрезков AM и BK, KC и MD имеют общие середины. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

С—4

1. Из вершины тупого угла равнобедренной трапеции $ABCD$ проведен перпендикуляр CE к прямой AD, содержащей большее основание. Докажите, что $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$.
2. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Бо́льшая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол в 60°. Докажите, что меньшая диагональ равна полусумме оснований трапеции.

С—5

1. Постройте параллелограмм по диагонали, стороне и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими данную сторону и ей противоположную.

2. Постройте равнобедренную трапецию по острому углу, диагонали и перпендикуляру, проведенному из вершины острого угла к прямой, содержащей меньшее основание трапеции.

С—6

1. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и K — середины сторон AB и AD соответственно. На прямой AC взята точка P, на прямой BD — точка E, $MP \perp AC$, $KE \perp BD$. Известно, что $4KE = AD$. Найдите отношение сторон $AP : PC$.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка P, а на сторонах AB и BC — соответственно точки M и K, $AM = CK$, $2MK = AC = 4AP$. Найдите угол PMK.

С—7

1. В ромбе $ABCD$ угол B тупой. На стороне AD взята точка K, $BK \perp AD$. Прямые BK и AC пересекаются в точке O, $AC = 2BK$. Найдите угол AOB.

2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, $MC = KD$. Отрезки DM и AK пересекаются в точке O, $2OM = AM$. Найдите угол AMO.

С—8

1. Постройте прямоугольник по углу между стороной и диагональю и перпендикуляру, проведенному из вершины прямоугольника к прямой, содержащей эту диагональ.

2. Постройте квадрат $ABCD$ по отрезку PQ, равному биссектрисе AE треугольника ABC.

С—9

1. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $DE \perp AB$. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $DE \cdot AB$.

2. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

С—10

1. Высоты, проведенные из вершины тупого угла параллелограмма, составляют угол в 45°. Одна из высот делит сторону, на которую она опущена, на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины острого угла. Найдите площадь параллелограмма.

2. На рисунке 25 ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC, $KT \parallel BC$, $MP \parallel AB$, $EO \parallel AC$. Докажите, что площади четырехугольников $AEMH$ и $MOCT$ относятся как $BP : BK$.

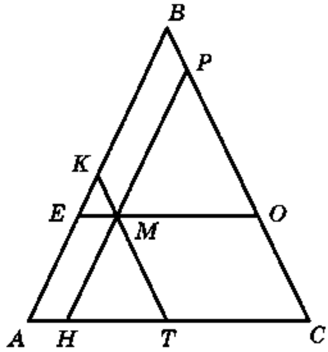

Рис. 25

С—11

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BMC равна половине площади параллелограмма.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. На сторонах AC, AB, BC соответственно взяты точки M, P, K так, что четырехугольник $CMPK$ является квадратом, $AC = 6$ см, $BC = 14$ см. Найдите сторону MC.

С—12

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, $\angle D = 60°$. Биссектрисы углов C и D пересекаются в точке O, $OD = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найдите площадь трапеции.

2. В трапеции $MPHK$ MK — большее основание. Площади треугольников MHK и KHP равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

С—13

1. В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями боковая сторона равна 26 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, меньший из которых равен 24 см. Найдите площадь трапеции.

2. Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а основания 30 см и 15 см. Найдите угол, который образуют продолжения боковых сторон трапеции.

С—14

1. В треугольнике два угла равны $105°$ и $45°$, а площадь равна $(\sqrt{3}+1)$ см^2. Найдите меньшую высоту треугольника.
2. Диагональ ромба в четыре раза больше расстояния от точки пересечения его диагоналей до стороны. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 2 см.

С—15

1. Даны два отрезка AB и EK. Точки C и M лежат соответственно на отрезках AB и EK. Отрезки AC, CB и EM, MK пропорциональны. Докажите, что $AB \cdot MK = CB \cdot EK$.
2. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90°$), $D \in AC$ и $E \in AB$, причем $DE \parallel BC$ и $DE = DC$, $AE = 15$ мм, $EB = 20$ мм. Найдите периметр треугольника ABC.

С—16

1. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD, $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите AC.
2. Прямая DE, параллельная стороне AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, стороны которого в три раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь трапеции $ADEC$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2.

С—17

1. В остроугольном треугольнике ABC BD и AE — высоты. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.
2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) точка K лежит на стороне CD, причем $CK : KD = 1 : 2$. AK пересекает BD в точке O. Докажите, что если $BC : AD = 1 : 2$, то $BO = OD$.

С—18

1. В трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, $AC = \sqrt{ab}$. Докажите, что $\angle BAC = \angle ADC$.
2. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

С—19

1. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, P, Q соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что отрезки MP и NQ точкой пересечения делятся пополам.

2. В параллелограмме $ABCD$ F — середина BC. AF пересекает BD в точке E, CE пересекает AB в точке K; $KB = 5$, $AD = 12$, $\angle A = 30°$. Найдите площадь параллелограмма.

С—20

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BE \perp AC$, $AE : EC = 1 : 3$. Найдите углы, которые составляет со сторонами прямоугольника его диагональ.

2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $BE \perp AD$, $BC : AD = 1 : 2$, $BE : ED = 3 : 4$. Площадь треугольника ABE равна 18 см^2. Найдите площадь трапеции.

С—21

1. В остроугольный треугольник впишите прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой, так, чтобы бо́льшая сторона прямоугольника лежала на одной стороне треугольника, а две его вершины лежали на двух других сторонах треугольника.

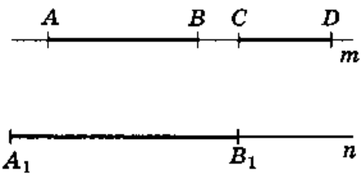

Рис. 26

2. На рисунке 26 $m \parallel n$. Постройте на прямой n только с помощью линейки отрезок C_1D_1 такой, чтобы $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

С—22

1. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $CE \perp AB$, CD — медиана, $AB = 4$, $ED = \sqrt{3}$. Найдите углы треугольника.

2. В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Найдите синус, косинус и тангенс угла ABC.

С—23

1. Площадь прямоугольного треугольника равна S, а один из острых углов α. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу. Вычислите длину высоты, если $S = 42{,}3$ и $\alpha = 50°27'$.

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = \angle C = 90°$) $\angle BAD = 40°27'$, $AB = 12{,}7$, $AC = 18{,}1$. Найдите угол CAD.

С—24*

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 4, а угол 30°. В этот треугольник вписан прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой. Найдите площадь прямоугольника, если его бóльшая сторона лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах.

2. В треугольнике ABC угол ACB тупой, $BO \perp AC$, $OF \perp AB$, $OD \perp BC$. Докажите, что $\angle ACB = \angle DFB$.

С—25

1. В трапеции $ABCD$ $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$. С центром в точке A проведена окружность радиусом, равным AB. Каково взаимное расположение этой окружности и прямой BD?

2. Из точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол α. Радиус окружности равен r. Найдите расстояние между точками касания.

С—26

1. На диаметре окружности AB отмечена произвольная точка C. На отрезке CB как на диаметре построена окружность; BE и BF — хорды бóльшей окружности, которые пересекают меньшую окружность соответственно в точках P и K. Докажите, что $\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$.

2. В точке A к окружности проведена касательная AB, AC — хорда этой окружности, $\angle BAC$ острый, $\smile AM = \smile MC$ (точка M лежит на дуге AC и расположена во внутренней области угла BAC). Расстояние от точки M до AC равно 5 см. Найдите расстояние от точки M до AB.

С—27

1. AB — диаметр окружности с центром в точке O. На отрезке OB как на диаметре построена окружность с центром в точке O_1. Хорда бо́льшей окружности BC пересекает меньшую окружность в точке E. Через точки O_1 и E проведена прямая, которая пересекает бо́льшую окружность в точках K и F ($K—E—F$), $KE = 2$ см, $EF = 8$ см. Найдите BC.
2. Две окружности пересекаются в точках A и B. На продолжении их общей хорды AB выбрана точка M. Из этой точки проведены касательные ME и MF к этим окружностям (E и F — точки касания). Докажите, что $ME = MF$.

С—28*

1. Две окружности, радиусы которых равны 1 и 3, внешне касаются в точке C; AB — их общая внешняя касательная (A и B — точки касания). Найдите площадь треугольника ACB.
2. Вершины A, B, C остроугольного треугольника ABC лежат на окружности с центром в точке O; $AH \perp BC$. Докажите, что $\angle OAC = \angle BAH$.

С—29

1. В треугольнике ABC $\angle ACB = 120°$, $AC = CB = a$. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и CB пересекаются в точке M. Найдите расстояние от точки M до середины стороны AB.
2. Из точки M к окружности с центром в точке O проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания), $BF \perp AM$. BF пересекает MO в точке K, $MO = 2OB$. Найдите угол KAB.

С—30

1. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь этого треугольника.
2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

С—31

1. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом 120° при вершине описана окружность. Докажите, что отрезок, соединяющий центр описанной окружности с точкой пересечения продолжения высот треугольника, равен диаметру описанной окружности.

2. Трапеция вписана в окружность. Ее основания равны 6 дм и 8 дм, а высота 1 дм. Найдите радиус этой окружности, если известно, что основания трапеции находятся по одну сторону от центра.

С—32

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD соответственно в точках E и F.

   Какие из векторов $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DF}$:
   а) коллинеарны;
   б) сонаправлены;
   в) противоположно направлены;
   г) равны;
   д) имеют равные длины?

2. В круге проведены диаметр AC и хорда AB. Внутри круга выбрана точка M. От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MF}$, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Чему равен угол MNF?

С—33

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$. Докажите, что
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

2. На рисунке 27 $ABCD$ и $CFED$ — параллелограммы.

   Укажите такой вектор $\vec{x}$, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\overrightarrow{AD}$.

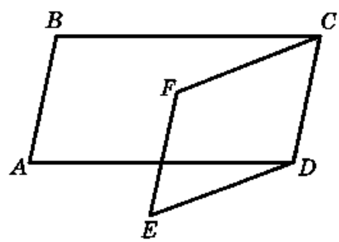

Рис. 27

С—34

1. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$.
2. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O. Выразите вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.
3. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) с прямым углом A проведена диагональ AC, $\angle BCA = 45°$, $\angle ACD = 90°$, $AC = a$. Найдите $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}|$.

С—35

1. Даны четыре точки O, A, M, B такие, что $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$. Докажите, что точки A, M, B лежат на одной прямой.
2. Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, а точка H — на стороне AD, причем $AM : MC = 2 : 1$ и $AH = HD$. Выразите вектор $\overrightarrow{MH}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{p} = \overrightarrow{AD}$.

С—36

1. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, M, P, F, H — середины соответственно отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что точки M, P, F, H являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.
2. Докажите, что в треугольнике ABC выполняется неравенство $OM \leqslant \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, где M — точка пересечения медиан, а O — произвольная точка плоскости.

С—37

1. В равнобедренной трапеции диагональ, равная 4 см, составляет с основанием угол в 60°. Найдите среднюю линию трапеции.
2. Докажите, что если трапецию можно разделить двумя прямыми на три равносторонних треугольника, то средняя линия такой трапеции в полтора раза больше меньшего основания.

С—38

В ромбе $ABCD$ $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM : MB = CK : KD = 1,5$.

а) Докажите, что $MBKD$ — прямоугольник.

б) Найдите его периметр и площадь.

С—39

1. AB и AC — касательные к окружности с центром O (C и B — точки касания). Найдите градусную меру меньшей из дуг BC, если расстояние от центра окружности до точки A равно 8 см, а до хорды BC 6 см.

2. Где внутри трапеции: вне или на основании — расположен центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 10 см, 24 см и высотой 17 см?

С—1

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны имеют равные длины. Диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне ED, $\angle EAC = \angle DCA$. Сравните периметры четырехугольников $EABC$ и $DCBA$.
2. Сумма углов выпуклого n-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого $(n-1)$-угольника (k — натуральное число). Найдите k.

С—2

1. В выпуклом четырехугольнике $MPKH$ $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH и PK отмечены точки A и B так, что $PB = PA$. Отрезок AB проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $HP \perp AB$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Отрезки BM и KD пересекаются в точке O, $\angle BOD = 140°$, $\angle DKB = 110°$, $\angle BMC = 90°$. Найдите отношение длин отрезков MC и AD и углы параллелограмма.

С—3

1. Точки A и B принадлежат соответственно сторонам PE и ET треугольника PET. Прямая, проходящая через вершину T вне треугольника, пересекает луч AB в точке K, $AP = KT$, $AB = BK = \frac{1}{2}PT$. Докажите, что точка A является серединой отрезка PE.
2. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M, а вне четырехугольника — точка K так, что пары отрезков AK и BM, KD и MC имеют общие середины. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

С—4

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние между прямыми AD и BC, содержащими основания, равно $\frac{1}{2}(AD + BC)$.
2. Из вершины прямого угла меньшего основания прямоугольной трапеции под углом 45° к этому основанию проведен луч, который проходит через середину большей боковой стороны. Докажите, что меньшая боковая сторона этой трапеции равна сумме оснований.

С—5

1. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и перпендикуляру, проведенному из конца одной диагонали к прямой, содержащей другую диагональ.

2. Постройте равнобедренную трапецию по двум углам, на которые диагональ делит тупой угол, и отрезку длиной, равной расстоянию между прямыми, содержащими основание трапеции.

С—6

1. В прямоугольнике $MPKH$ O — точка пересечения диагоналей. Точки A и B — середины сторон MP и MH соответственно. Точка C делит отрезок MK в отношении $1 : 7$, считая от точки M; $AC \perp MK$. Найдите отношение $BO : PH$.

2. Некая прямая, параллельная основанию MK равнобедренного треугольника MPK, пересекает стороны MP и PK в точках B и C соответственно. Точка A делит отрезок MK в отношении $1 : 3$, считая от точки M; $BC = 2AM$. Найдите угол MAB.

С—7

1. В ромбе $MPHK$ угол M острый. Отрезок PE является перпендикуляром к прямой MK, O — точка пересечения диагоналей, а T — общая точка прямых PE и MH, $\angle MTP = 120°$, $OH = a$. Найдите PE.

2. На сторонах AB, BC, CD квадрата $ABCD$ отмечены соответственно точки M, K, P, $MP \perp AK$. Сравните отрезки MP и AK.

С—8

1. Постройте ромб по острому углу и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба.

2. Постройте квадрат $ABCD$ по отрезку PQ и углу hk, если $PQ = BM$, $\angle hk = \angle MBD$ (M — середина отрезка AD).

С—9

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $BD \perp AC$. Докажите, что площадь треугольника равна $\frac{1}{2} BD \cdot AC$.

2. Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

С—10

1. В ромбе $ABCD$ BM — биссектриса треугольника ABD, $\angle BMD = 157°30'$. Найдите площадь ромба, если его высота равна 10 см.

2. На рисунке 28 $ABCD$ — ромб. $HT \parallel AB$, $MP \parallel BC$. Докажите, что произведение площадей четырехугольников $AMOT$ и $OHCP$ равно произведению площадей четырехугольников $MBHO$ и $TOPD$.

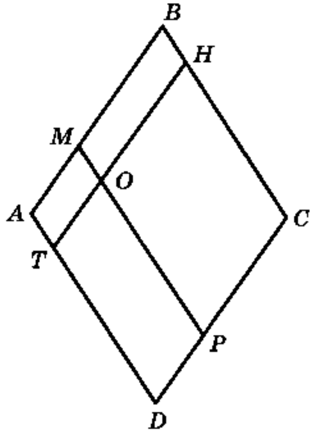

Рис. 28

С—11

1. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющих одинаковую площадь.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, которая удалена от прямой CD на 4 см. Найдите площадь треугольника AOB, если $CD = 8$ см.

С—12

1. В трапеции $MHPK$ $MH = HK$, точка A — середина большего основания MK, а точка B — середина боковой стороны MH, $BA \perp MH$, $MK = a$, $HP = b$. Найдите площадь трапеции.

2. Отрезок EP пересекает основания BC и AD трапеции $ABCD$ так, что точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC и $EP \perp BC$. Основания трапеции делят отрезок EP на три равные части. Площади треугольников BEC и APD равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

С—13

1. В равнобедренной трапеции диагональ равна 25 см, а высота 15 см. Найдите площадь трапеции.
2. Диагонали некоторой трапеции равны 5 см и 12 см, а основания 3 см и 10 см. Найдите углы между диагоналями этой трапеции.

С—14

1. Большее основание трапеции равно 6 см, а меньшее 4 см. Углы при большем основании $30°$ и $45°$. Найдите площадь трапеции.
2. Высоты параллелограмма равны 6 см и 7,8 см, а его площадь 78 $см^2$. Найдите длину меньшей диагонали.

С—15

1. Даны два отрезка KP и EC. Точки M и L лежат соответственно на отрезках KP и EC. Отрезки KP, MP и EC, LC пропорциональны. Докажите, что $KM \cdot LC = MP \cdot EL$.
2. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90°$), $P \in AC$ и $K \in AB$, причем $PK \parallel BC$ и $PK = KB$, $AP = 5$ дм, $PC = 4$ дм. Найдите периметр треугольника ABC.

С—16

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) AC — биссектриса угла A делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Найдите периметр трапеции.
2. Прямая DE, параллельная стороне AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBC, стороны которого в четыре раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь трапеции $ADEC$ равна 30 $см^2$.

С—17

1. В остроугольном треугольнике ABC его высоты BD и AE пересекаются в точке O. Докажите, что $BO \cdot OD = AO \cdot OE$.
2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M лежит на стороне CD, причем $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$. Докажите, что $BD \perp AM$.

С—18

1. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $DC = a$, $AC = b$, $BC = \sqrt{ab}$. Докажите, что $\angle BAC = \angle DBC$.

2. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ диагонали пересекаются в точках O и O_1, причем $AO = OC$ и $A_1O_1 = O_1C_1$, $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$, $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$ и $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

С—19

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны между собой. Точки M, P, K, T соответственно середины сторон AB, BC, CD, AD. Докажите, что $MK \perp PT$.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

С—20

1. В трапеции $ABCD$ $AB \perp AD$, $AC \perp CD$, $BC = 6$, $AD = 8$. Найдите углы трапеции.

2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $AB : AD = 1 : 2$, $BE \perp AD$, $AE = 4$ см. Найдите площадь параллелограмма.

С—21

1. В остроугольный треугольник впишите равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершина прямого угла лежала на стороне треугольника, а гипотенуза была параллельна этой стороне и ее концы располагались на двух других сторонах треугольника.

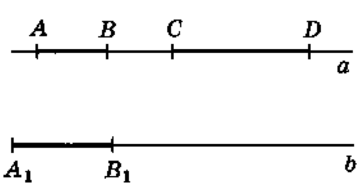

Рис. 29

2. На рисунке 29 $a \parallel b$. При помощи только линейки постройте отрезок C_1D_1, такой, чтобы $\frac{AB}{CD} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$.

С—22

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $D \in AB$, $DE \parallel AC$, $DE = EC$, $\frac{BD}{DA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите углы треугольника.
2. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Найдите синус, косинус и тангенс острого угла ромба.

С—23

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AB = CD$. Площадь трапеции равна S, $\angle BDA = \alpha$. Найдите высоту трапеции. Вычислите высоту, если $S = 234{,}6$ и $\alpha = 23°46'$.
2. В треугольнике ABC $BC = 2{,}7$, $AB = 4{,}2$, $\angle ACB = 132°40'$. Найдите угол BAC.

С—24*

1. В ромб вписан прямоугольник так, что все его вершины лежат на сторонах ромба, причем бо́льшая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба. Найдите площадь прямоугольника, если его стороны относятся как 1 : 2, сторона ромба равна a, острый угол 60°.
2. В остроугольном треугольнике ABC $BD \perp AC$, $DE \perp AB$ и $DF \perp BC$. Докажите, что $\triangle EBF \sim \triangle ABC$.

С—25

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle CDA = 90°$) $BC = CD$, $AD = 2BC$. С центром в точке D проведена окружность радиусом, равным BD. Каково взаимное расположение этой окружности и прямой AB?
2. Из некоторой точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол α. Расстояние от центра окружности до хорды, которая соединяет точки касания, равно m. Найдите длины отрезков касательных от данной точки до точки касания.

С—26

1. На диаметре AB окружности отмечена точка M. С центром в этой точке проведены две окружности, которые расположены внутри данной; BK и BK_1 — хорды большей окружности, которые касаются двух меньших окружностей в точках P и P_1 соответственно. Докажите, что $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B_1}$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 40°. На боковой стороне как на хорде построена окружность, которая касается основания в его конце. Две вершины и точка пересечения окружности с другой стороной делят окружность на три части. Найдите их.

С—27

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, $AB : BC = 2 : 3$. Точка D делит дугу AC пополам. BD пересекает AC в точке E. Через точку E проведена хорда KM, $KE = 4$ см, $ME = 6$ см. Найдите AC.

2. Две окружности внешне касаются в точке F. Через эту точку проведена общая касательная к этим окружностям. На этой касательной выбрана точка M. Из этой точки к этим окружностям проведены секущие, которые пересекают первую окружность в точках A и B (M—A—B), а вторую — в точках C и D (M—C—D), $MA = MC$. Докажите, что $AB = CD$.

С—28*

1. Окружности с радиусами, равными 4 см и 1 см, внутренне касаются. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности, и прямая AB образует с общей касательной в окружности угол 60°. Найдите AB.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены отрезки AC и AD, каждый из которых является хордой одной из окружностей и касается другой. Докажите, что $AC \cdot BA = AD \cdot BC$.

С—29

1. В треугольнике ABC $\angle ABC$ тупой. Продолжения высот AD и CE пересекаются в точке M, $MB = 5$, $AC = 10$. Найдите площадь четырехугольника $AMCB$.

2. Во внутренней области треугольника ABC взята точка O, равноудаленная от его сторон. Найдите $\angle AOC$, если $\angle ABC = 2\alpha$.

С—30

1. В равнобедренном треугольнике расстояние от центра вписанной окружности до вершины неравного угла равно 5 см. Боковая сторона равна 10 см. Найдите длину этого радиуса.

2. Около круга, радиус которого равен 2, описана прямоугольная трапеция. Меньшее основание трапеции равно 3. Найдите площадь трапеции.

С—31

1. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 72°. Через вершину A и центр описанной окружности проведена прямая до пересечения в точке K со стороной BC, $BK = a$. Найдите радиус описанной окружности.

2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) вписана в окружность, радиус которой равен 4 см; AC — биссектриса угла A, $\angle BCA = 30°$. Найдите площадь трапеции.

С—32

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, точка E — середина BC. Прямая AE пересекает продолжение DC в точке F. Среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ укажите пары:
   а) коллинеарных векторов;
   б) сонаправленных векторов;
   в) противоположно направленных векторов;
   г) равных векторов;
   д) векторов, имеющих равные длины.

2. В ромбе $ABCD$ $|\overrightarrow{AC}| = 12$ см, $|\overrightarrow{BD}| = 16$ см. От вершины A отложен вектор $\overrightarrow{AE}$, равный вектору $\overrightarrow{BD}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{EC}$.

С—33

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90°, а углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны 135°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. Докажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

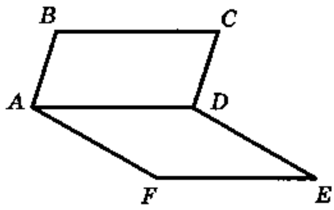

Рис. 30

2. На рисунке 30 *ABCD* и *ADEF* — параллелограммы. Укажите такой вектор $\vec{y}$, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \vec{y} = \overrightarrow{AF}$.

С—34

1. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$.
2. В четырехугольнике *ABCD* $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, где *O* — произвольная точка плоскости. Докажите, что *ABCD* — параллелограмм.
3. В трапеции *PKHM* (*PM* и *KH* — основания) с прямым углом *P* проведена диагональ *HP*, $\angle PHK = 30°$, $\angle PHM = 90°$. Найдите $|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH}|$, если $PM = a$.

С—35

1. Даны четыре точки *E*, *K*, *F*, *O* такие, что $\overrightarrow{OE} = \frac{9}{7}\overrightarrow{OK} - \frac{2}{7}\overrightarrow{OF}$. Докажите, что точки *E*, *K*, *F* лежат на одной прямой.
2. Точка *T* лежит на стороне *BC* параллелограмма *ABCD*, а точка *E* — на его диагонали *BD*, причем $BE : ED = 2 : 1$ и $BT = TC$. Выразите вектор $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{p} = \overrightarrow{DC}$.

С—36

1. *ABCD* — произвольный четырехугольник, *E* и *F* — середины соответственно сторон *AB* и *CD*. Докажите, что середины отрезков *EC*, *BF*, *AF*, *ED* служат вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.
2. Используя векторы, докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

С—37

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с основанием угол в 45°. Высота трапеции равна 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.
2. Докажите, что если трапецию можно разделить одной прямой на ромб и равносторонний треугольник, то средняя линия трапеции составляет $\frac{3}{4}$ большего основания.

С—38

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне BC. На стороне BC выбрана точка E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O, причем $BO : OD = 2 : 3$, $BC = 9$ см и $AE = 20$ см. С помощью микрокалькулятора вычислите $\angle AOD$.
2. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно отмечены точки H и P так, что $PC = 8$ см, $\angle HPC = \angle ABC$. Площади треугольников PHC и ABC относятся как $4 : 25$, $\cos C = \frac{4}{5}$. Найдите высоту BE треугольника ABC.

С—39

1. Из точки A к окружности диаметром BC проведена касательная AC. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке D, $AD = 2$ см, $BD = 6$ см. Найдите градусную меру дуги окружности, заключенной внутри треугольника ABC.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A прямой. Диагональ BD образует со сторонами BC, CD, AD углы 90°, 45°, 30° соответственно. Могут ли биссектрисы углов данного четырехугольника пересекаться в одной точке?

ВАРИАНТ 7

С—1

1. Может ли многоугольник иметь 25 диагоналей?
2. Сколько углов с градусной мерой меньше 10° может быть в выпуклом многоугольнике?

С—2

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC взяты точки K и E соответственно так, что $\angle KBE = 90^\circ$ и отрезок EK проходит через точку O пересечения диагоналей. Докажите, что $BO = OE$.
2. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно, а внутри треугольника — точка M так, что четырехугольник $DCEM$ является параллелограммом и $DE \parallel AB$. Прямая DM пересекает отрезок AB в точке K, а прямая EM — в точке H. Докажите, что $AK = HB$.

С—3

1. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно. Отрезок AK пересекает диагональ BD в точке P, а отрезок CM — в точке E. Известно, что $AK \parallel CM$, $PK = EM$, $BP = ED$, $KC = AM$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $BO = OD$, $AO < OC$. Докажите, что $\angle BAD > \angle BCD$.

С—4

1. Докажите, что сумма боковых сторон любой трапеции больше разности ее большего и меньшего оснований.
2. Найдите связь между сторонами трапеции, если известно, что внутри трапеции существует точка, равноудаленная от прямых, содержащих ее стороны.

С—5

1. Постройте параллелограмм по стороне, диагонали и углу, противолежащему этой диагонали.
2. Постройте трапецию по двум диагоналям, углу между ними и одной из боковых сторон.

С—6

1. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ взята точка E. Известно, что $\angle EDC = \angle CAD = 15°$. Докажите, что $BE < 5ED$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На отрезке AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает луч DB в точке E, лежащей вне параллелограмма; $\angle BAE + \angle BCE = 60°$. Найдите расстояние между прямыми BC и AD, если $AB = 10$ см.

С—7

1. Два равных ромба имеют общую точку пересечения диагоналей, причем меньшие диагонали этих ромбов взаимно перпендикулярны. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны одного ромба, перпендикулярна стороне другого.
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $AMKC$ и $CFPB$. Докажите, что сумма расстояний от точек M и P до прямой AB равна AB.

С—8

1. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.
2. Постройте квадрат по разности диагонали и стороны.

С—9

1. Докажите, что медиана любого треугольника делит этот треугольник на треугольники с равными площадями.
2. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 45°$, $\angle C = 100°$. Диагональ BD составляет с боковой стороной CD угол в $35°$. На стороне AB построен параллелограмм $ABPK$ так, что точка D принадлежит отрезку BP и $BD : DP = 2 : 1$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

С—10

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c. От вершины меньшего острого угла на катете отложен отрезок длиной a, из конца которого к гипотенузе проведен перпендикуляр длиной b. Найдите меньший катет исходного треугольника.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой. На стороне BC взята точка M, а через вершину D проведена прямая, параллельная AM и пересекающая луч MC в точке K. Точка E принадлежит отрезку AM. На прямой EM отмечена точка P так, что $DE \parallel KP$. Сравните площади невыпуклых пятиугольников $ABMED$ и $DKPMC$.

С—11

1. В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 12 см и пересекаются под углом 30° друг к другу. Найдите площадь этого четырехугольника.
2. Точка E — середина стороны AB треугольника ABC, а точки M и H делят сторону BC на три равные части, $BM = MH = HC$. Найдите площадь треугольника EMH, если площадь треугольника ABC равна S.

С—12

1. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Прямые, проходящие через середины сторон AB, BC, DC перпендикулярно к этим сторонам, пересекаются в точке O; $\angle BCD = 150°$, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $MHPK$ основания MK и HP относятся как $3 : 1$. На отрезке MK отмечены точки A и B так, что $MA = AB = KB$. Отрезки HB и AP пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника HOP равна 5 см^2.

С—13

1. В остроугольном треугольнике ABC BH — высота. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.
2. Дан треугольник со сторонами a, b, c. Определите вид треугольника, если $c^2 > a^2 + b^2$.

С—14

1. В трапеции $MPKE$ точка A принадлежит большему основанию ME, $AM = MP = a$, $AE = EK$. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали проходят через точку пересечения медиан треугольника PAK.
2. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, и отрезок, соединяющий середины основания и боковой стороны, равны по 12 см.

С—15

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Докажите, что если $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$, то $\angle ABD > \angle DBC$.
2. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $AC = 2$ см. На сколько нужно продолжить сторону AC до пересечения с биссектрисой внешнего угла при вершине B?

С—16

Отрезок BK (K принадлежит стороне AC) разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABK и KBC, причем $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$. Найдите углы треугольника.

С—17

1. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что $a^2 = bc + b^2$.
2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки D и E. CD и AE пересекаются в точке O, $S_{ADO} = S_{CEO} = 8$, $S_{DOE} = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—18

1. Внутри треугольника ABC взята точка D и соединена с его вершинами A и B. На стороне BC вне его построен треугольник BCE так, что $\angle EBC = \angle ABD$ и $\angle ECB = \angle BAD$. Докажите, что $\triangle DBE \sim \triangle ABC$.
2. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажите, что если $a^2 = bc + b^2$, то $\angle A = 2\angle B$.

С—19

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $CE \perp AB$, $BC = 2AB$, M — середина AD. Докажите, что $\angle EMD = 3\angle AEM$.
2. В треугольнике ABC медианы AE и CD пересекаются в точке O; $AE = 9$, $CD = 12$, $AC = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—20

1. В трапеции $ABCD$ $AC \perp BD$, $CE \perp AD$, $AC = 15$ см, $AE = 9$ см. Найдите площадь трапеции.
2. В треугольнике ABC CM — биссектриса внешнего угла C, $BM \perp CM$. Угол B в два раза меньше этого внешнего угла, $BF \perp AM$, $AF : FM = 3 : 1$. Найдите угол BAM.

С—21

1. Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов как 2 : 3 и по его периметру.
2. Постройте треугольник ABC по двум острым углам A и C ($\angle A + \angle C > 90°$) и расстоянию от точки пересечения высот до вершины B.

С—22

1. Постройте угол, синус которого в два раза больше его косинуса.
2. Вычислите $\sin 75°$.

С—23

1. В трапеции $ABCD$ (AC и BD — основания) $\angle CAD = \beta$, $\angle CBD = \alpha$, $BD = d$. Найдите AC. Вычислите AC, если $d = 15{,}9$, $\alpha = 27°30'$, $\beta = 40°15'$.
2. В равнобедренном треугольнике медиана составляет с основанием угол α. Найдите угол при вершине треугольника, если $\alpha = 37°23'$.

С—24*

1. Основание треугольника равно b. В этот треугольник вписана трапеция, у которой три стороны равны a, а острый угол 60°. Меньшее основание трапеции лежит на основании треугольника, а большее основание трапеции параллельно основанию, и его концы лежат на двух других сторонах треугольника. Найдите площадь треугольника.
2. В треугольнике ABC BD — медиана, M — произвольная точка, лежащая на медиане. Прямые AM и CM пересекают стороны треугольника соответственно в точках E и F. Докажите, что $EF \parallel AC$.

С—25

1. Две окружности разных радиусов внешне касаются. Докажите, что отрезок их общей касательной, заключенный между точками касания, есть среднее пропорциональное между диаметрами этих окружностей.
2. Через концы диаметра AB окружности проведены две касательные к ней. Третья касательная пересекает первые две в точках C и D. Докажите, что квадрат радиуса этой окружности равен произведению отрезков CA и DB.

С—26

1. Через точку пересечения окружности с биссектрисой вписанного угла проведена хорда, параллельная одной стороне угла. Докажите, что эта хорда равна другой стороне вписанного угла.
2. Через точку K окружности с центром O проведены хорда KA и касательная BC (B—K—C). Прямая, проведенная через центр O перпендикулярно радиусу OA, пересекает AK в точке M и BC — в точке N. Докажите, что $NK = NM$.

С—27

1. QP — диаметр окружности с центром в точке O. На диаметре QP между точками O и P выбрана точка O_1 и с центром в этой точке радиусом O_1P проведена окружность. Прямая, проходящая через центр O_1 меньшей окружности, пересекает бóльшую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите $\frac{r}{R}$, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.
2. Две окружности касаются внешне в точке K. Через эту точку проведена прямая, которая, пересекаясь с окружностями, образует хорды KP и KQ. Из точек P и Q проведены к окружностям касательные PT_1 и QT_2, где T_1 и T_2 — точки касания. Докажите, что $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$.

С—28*

1. Даны два круга одного и того же радиуса r. Расстояние между их центрами равно d. Вычислите площадь четырехугольника, образованного касательными, проведенными к каждому кругу из центра другого.
2. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, причем AC — биссектриса угла DAB. Докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

С—29

1. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис равно данному отрезку m.
2. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6, а боковая сторона равна 5. Найдите расстояние между точками пересечения медиан и высот этого треугольника.

С—30

1. В треугольник со сторонами 20, 20, 24 вписана окружность. Другая окружность касается основания, боковой стороны и данной окружности. Найдите радиус этой окружности.

2. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает основание BC (или его продолжение) в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE — в точке P. Найдите угол BAD, если известно, что $BM = MP$.

С—31

1. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

2. Вокруг треугольника ABC описана окружность, радиус которой равен R; $AC = a$, $BC = b$. Точка D лежит на стороне AC, $\angle ABC = \angle BDC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDC.

С—32

1. На рисунке 31 $ABCD$ и $EFCD$ — параллелограммы. Сколько существует различных векторов с началом и с концом в вершинах данных параллелограммов?

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC. От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MD}$ соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$. Докажите, что $MFED$ — параллелограмм.

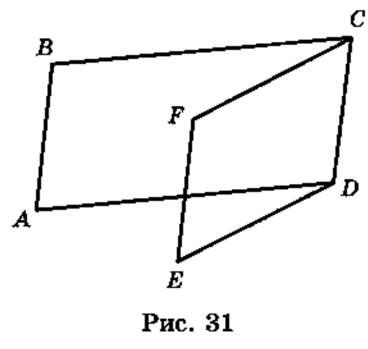

Рис. 31

С—33

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и A_1BC_1D. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$.

2. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

С—34

1. В треугольнике ABC O — точка пересечения его медиан. Постройте вектор $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ и найдите его длину, если медиана CC_1 равна m.
2. В треугольнике ABC M и N соответственно середины сторон AB и AC, O — произвольная точка, M_1 — точка, симметричная точке M относительно центра O, а N_1 — точка, симметричная точке N относительно того же центра. Используя векторы, докажите, что $M_1N_1 \parallel BC$ и что $M_1N_1 = \frac{1}{2}BC$.

С—35

1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1, C_1 такие, что $\overrightarrow{AC_1}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1}=k\overrightarrow{CA}$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$.
2. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel FA$. Используя векторы, докажите, что $BE \parallel AF$.

С—36

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка K лежит на стороне BC, а точка E — на стороне AD, причем $BK : KC = DE : AE = 1 : 2$. Используя векторы, докажите, что точка O — середина KE.
2. Используя векторы, докажите, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

С—37

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) K — точка пересечения биссектрис внешних углов A и B трапеции, а L — точка пересечения биссектрис внешних углов D и C. Вычислите периметр трапеции $ABCD$, если $KL = 25$ см.
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle C = \angle D = 90°$) $BC : CD = 1 : 2$. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите основания трапеции.

С—38

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40°$. Используя микрокалькулятор, найдите площадь трапеции.

2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. Из вершины A проведены высоты параллелограмма AM и AH к сторонам BC и CD соответственно, $MH : AC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей треугольников MAH и ABC.

С—39

Два круга, касающиеся друг друга, вписаны в полукруг. Найдите отношение радиусов этих кругов, если радиус одного из них в три раза меньше радиуса полукруга, а точки касания с диаметром полукруга лежат по разные стороны от его центра.

ВАРИАНТ 8

С—1

1. Существует ли многоугольник с 27 диагоналями?
2. В выпуклом многоугольнике имеется 5 углов с градусной мерой 140° каждый, остальные углы острые. Найдите число сторон этого многоугольника.

С—2

1. В параллелограмме $ABCD$ через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и E соответственно, $BO = OE$. Найдите угол KBE.
2. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, $MK \parallel BD$. Прямая MK пересекает луч CB в точке E, а луч CD — в точке P. Докажите, что $EM = KP$.

С—3

1. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и P соответственно. Диагональ BD пересекает отрезок PC в точке E, а отрезок AK — в точке T. Известно, что $KC = AP$, $AT = EC$, $TK = EP$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $BO = OD$, $\angle BAD > \angle BCD$. Докажите, что $AO < OC$.

С—4

1. Докажите, что сумма диагоналей любой трапеции больше суммы ее оснований.
2. Найдите связь между противоположными углами трапеции, если известно, что внутри нее существует точка, равноудаленная от вершин трапеции.

С—5

1. Постройте параллелограмм по стороне, диагонали и углу, который эта диагональ составляет с другой стороной.
2. Постройте трапецию по четырем сторонам.

С—6

1. На отрезках MH и MK в прямоугольнике $MPKH$ взяты точки E и T соответственно, $\angle KEH = 30°$, $ET \perp MK$, $\angle KMH = 15°$. Докажите, что $PT > 0{,}49KH$.
2. Дан параллелограмм $MPKH$ с тупым углом P. На диагонали PH как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок MK в точке A; $\angle KPA + \angle KHA = 45°$, KB — перпендикуляр, проведенный к прямой HM. Найдите HB, если $KB = 10$ см.

С—7

1. Два равных ромба $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину острого угла, причем $\angle CAC_1 = 90°$, а лучи BD и D_1B_1 пересекаются в точке E; O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, OP — биссектриса треугольника BOC. Докажите, что $PA = PE$.
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $AKMC$ и $CPEB$. Прямые KM и PE пересекаются в точке T. Докажите, что $TC \perp AB$.

С—8

1. Постройте ромб по стороне и разности диагоналей.
2. Постройте квадрат по сумме диагонали и стороны.

С—9

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD. Точка D_1 симметрична точке D относительно точки B. Найдите отношение площадей треугольников AD_1C и ABC.
2. В трапеции $MPKO$ $\angle M = 45°$ и $\angle K = 135°$. На стороне MP построен параллелограмм $MPDT$ так, что его сторона параллельна прямой KO и пересекает сторону MO в точке A, причем $PA : AD = 1 : 3$. Площадь параллелограмма равна 36 см^2. Найдите его периметр.

С—10

1. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны a и b ($a > b$). Меньшее основание равно c. Найдите расстояние от вершины прямого угла меньшего основания до прямой, содержащей бóльшую боковую сторону.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой. Вне параллелограмма на луче BC отмечены точки M и K, а на луче DC — точки E и P, причем $AM \parallel DK$, $EA \parallel BP$. Докажите, что площади невыпуклых пятиугольников $ABPCM$ и $ADKCE$ равны.

С—11

1. В треугольнике точка пересечения биссектрис удалена от прямой, содержащей одну из сторон, на 1,5 см. Периметр треугольника равен 16 см. Найдите его площадь.
2. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки M, K, P соответственно так, что $AM : MB = BK : KC = PC : AP = 2 : 1$. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь четырехугольника $MBKP$.

С—12

1. В трапеции $MPKH$ $MH \parallel PK$. Биссектрисы углов M, K, H, P пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до прямой PK равно a, $PM = b$, $KH = c$. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны 5 см^2 и 20 см^2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

С—13

1. В треугольнике HPK $\angle H$ тупой, PE — высота треугольника. Докажите, что $PK^2 = HP^2 + HK^2 + 2HE \cdot HK$.
2. В треугольнике со сторонами a, b, c c — бо́льшая сторона. Определите вид треугольника, если $c^2 < a^2 + b^2$.

С—14

1. В трапеции $ABCD$ M— середина большего основания AD, $AB = BC = CD = a$. Точка пересечения диагоналей трапеции совпадает с точкой пересечения высот треугольника BMC. Найдите площадь трапеции.
2. Диагональ параллелограмма составляет со сторонами углы в 90° и в 15°. Найдите площадь параллелограмма, если его бо́льшая сторона равна 12 см.

С—15

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Докажите, что если $\angle ABD > \angle DBC$, то $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.
2. Стороны треугольника ABC ($\angle B$ меньший из углов треугольника) равны 16 см, 20 см, 24 см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрисы угла B и биссектрисы внешнего угла при вершине B с меньшей стороной треугольника и ее продолжением.

С—16

Отрезок FP разбивает треугольник EFM на два подобных треугольника EFP и PFM, причем $\angle PFM = 60°$. Площадь треугольника PFM равна 30 см². Найдите площадь треугольника EFM.

С—17

1. Катеты прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90°$) $BC = a$, $AC = b$, $E \in AB$, причем $AE : EB = 1 : 2$. Докажите, что $CE = \dfrac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$.
2. В треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC; AE и CD пересекаются в точке O, $S_{ADC} = S_{AEC}$, $S_{DOE} = 2$, $S_{AOC} = 8$. Найдите площадь треугольника ABC.

С—18

1. B — середина отрезка AC. Точки D и E находятся по одну сторону от прямой AC, причем $\angle ADB = \angle EBC$ и $\angle DAB = \angle BCE$. Докажите, что $\angle BDE = \angle ADB$.
2. $ABCD$ — параллелограмм. На сторонах AB, BC, CD, DA отмечены соответственно точки M, K, T, P, причем $\dfrac{AM}{CT} = \dfrac{AP}{CK} = \dfrac{1}{2}$. MT и KP пересекаются в точке E. В каком отношении эта точка делит отрезок MT?

С—19

1. $ABCD$ — ромб. Сторона ромба равна a, AE и DF — биссектрисы внешних углов A и D, $BE \perp AE$ и $CF \perp DF$. Докажите, что $EF = 2a$.
2. Площадь треугольника ABC равна 12 см². Медианы AE и CD пересекаются в точке O, $\angle AOC = 150°$, $AE = 3$ см. Найдите CD.

С—20

1. В трапеции $ABCD$ $AC \perp BD$, $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Высота трапеции равна $2\sqrt{6}$ см. Найдите площадь трапеции.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $OK \perp AD$, $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \dfrac{16}{1}$. Найдите углы ромба.

С—21

1. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) по отношению высоты BD к боковой стороне как $1 : 4$ и по его периметру.

2. Постройте треугольник ABC по данному углу B, отношению $AB : BC = 1 : 2$ и по расстоянию от точки пересечения биссектрис до вершины B.

С—22

1. Постройте угол, косинус которого в три раза меньше его синуса.

2. Вычислите $\sin 15°$.

С—23

1. В трапеции $ABCD$ $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 2BC$, $E \in AD$, причем $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$, $BE = a$, $\angle A = \alpha$. Найдите площадь трапеции. Вычислите площадь, если $a = 17{,}3$, $\alpha = 40°23'$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине таков, что его косинус равен m. Найдите тангенс угла между высотой, опущенной на боковую сторону, и основанием.

С—24*

1. В треугольник ABC вписана прямоугольная трапеция $FDEM$ ($\angle DFM = 90°$), у которой большее основание DE параллельно AC, $D \in AB$, $E \in BC$, а меньшее основание FM лежит на AC. Меньшее основание a, высота трапеции $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а бóльшая диагональ делит острый угол пополам. Найдите площадь треугольника, если высота треугольника, опущенная из вершины B, равна h.

2. В остроугольном треугольнике основание делится высотой на части, равные a и b. Найдите эту высоту, если ее часть от основания до точки пересечения высот равна m.

С—25

1. Две окружности разных диаметров внешне касаются. К ним проведены две общие касательные AC и BD, где A и B — точки касания с первой окружностью, а C и D — со второй. Докажите, что $ACDB$ — равнобедренная трапеция.

2. AB — диаметр окружности с центром в точке O. Окружность радиуса r и с центром в точке O_1 внутренне касается первой окружности в точке B. Через конец A диаметра большей окружности проведены две хорды, которые касаются меньшей окружности. Угол между хордами равен $60°$. Найдите длины этих хорд.

С—26

1. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) и касается стороны AB в точке B. Докажите, что $BD = \sqrt{BC \cdot AD}$.

2. Вершины четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности с центром в точке O, $\smile AB + \smile CD = 180°$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вершины треугольника AED принадлежат окружности с центром в точке O_1, $O_1E = 8$ см. Найдите AD.

С—27

1. На диаметре CD окружности выбрана точка E. Через эту точку проведена хорда AB, $AE = 4$, $BE = 3$, $AD = 6{,}5$, $\angle ABC = 60°$. Найдите CE и ED.

2. В треугольнике ABC угол B тупой. Постройте на основании AC точку D, такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

С—28*

1. Вершины квадрата $ABCD$ лежат на окружности с центром в точке O. Квадрат $EMPF$ расположен так, что сторона EF лежит на стороне BC данного квадрата, а вершины M и P лежат на окружности. Найдите сторону квадрата $EMPF$, если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

2. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, которая касается меньшей в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

С—29

1. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точками пересечения высот и биссектрис равно данному отрезку p.
2. Основание AC равнобедренного треугольника равно 6, а боковая сторона равна 5. Найдите расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис этого треугольника.

С—30

1. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 2 см и 8 см, вписана окружность. Другая окружность касается большего основания, боковой стороны и данной окружности. Найдите радиус этой окружности.
2. В ромб $ABCD$ со стороной, равной 4 см, и углом BAD, равным 60°, вписана окружность. К ней проведена касательная, пересекающая AB в точке M и AD — в точке P. Найдите MB и PD, если $MP = 2$ см.

С—31

1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на этих высотах.
2. В окружность вписан треугольник ABC, $AC = b$, $AB = c$. К окружности в точке A проведена касательная. Прямая CB пересекает эту касательную в точке M (C—B—M). Радиус окружности, описанной около треугольника AMC, равен R. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMB.

С—32

1. На рисунке 32 $ABCD$ и $FADE$ — параллелограммы. Сколько существует различных векторов с началом и с концом в вершинах данных параллелограммов?

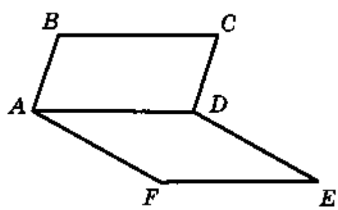

Рис. 32

2. ABC — правильный треугольник. Точка M лежит вне треугольника. От точки M отложены векторы $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MP}$, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$. Докажите, что $ML \perp KP$.

С—33

1. Даны два треугольника ABC и AB_1C_1, имеющие общую медиану AA_1. Докажите, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$.

2. $ABCD$ — параллелограмм. O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$, где P — любая точка плоскости.

С—34

1. O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Постройте вектор $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ и найдите его длину, если медиана AA_1 равна m.

2. Дан треугольник ABC. O — произвольная точка, A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные соответственно точкам A, B, C относительно точки O. Используя векторы, докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и что стороны их соответственно параллельны.

С—35

1. Па сторонах AB, BC, CD, DE параллелограмма $ABCD$ даны точки P, E, F, M так, что $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DA}$. Докажите, что $PEFM$ — параллелограмм.

2. В окружности с центром O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD. Хорды или их продолжения пересекаются в точке M. Докажите, что
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

С—36

1. Два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A. Докажите, что $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

2. Точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 — на стороне AC треугольника ABC; O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, причем $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$. Используя векторы, докажите, что AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC.

С—37

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали взаимно перпендикулярны, высота трапеции равна 12 см. Расстояние от вершины A до прямой CD в три раза больше, чем расстояние от вершины B до этой прямой. Найдите основания трапеции.
2. В трапеции $ABCD$ угол при вершине A прямой, а угол при вершине D равен 30°. Окружность, центр которой лежит на стороне AD, касается прямых AB, BC, CD. Найдите радиус окружности, если средняя линия трапеции равна $6 - \sqrt{3}$.

С—38

1. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40°$. Используя микрокалькулятор, найдите площадь трапеции.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, BM и BH — высоты параллелограмма, проведенные к сторонам AD и DC соответственно, $MH : BD = 2 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников MBH и BDC.

С—39

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AC выбрана точка D, причем $AD = a$, $DC = b$. В треугольники ABD и DBC вписаны окружности. Первая окружность касается BD в точке E, а вторая — в точке F. Найдите расстояние между E и F.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1 Вариант 1

1°. В трапеции $ABCD$ точка E — середина большего основания AD, $ED = BC$, $\angle B = 120°$. Найдите углы AEC и BCE.

2°. Постройте ромб по его диагонали и стороне.

3. В прямоугольнике $ABCD$ точка O является центром симметрии, а точки P и K — середины сторон AB и BC соответственно.

а) Определите вид выпуклого четырехугольника $OPBK$.

б) Докажите, что $PK = OD$.

4*. Найдите сумму углов, отмеченных на рисунке 33.

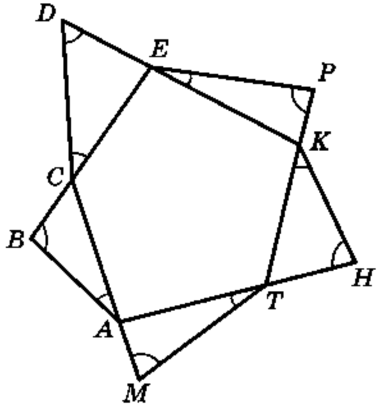

Рис. 33

К—1 Вариант 2

1°. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали имеют общую середину. На продолжении стороны AD за вершину D взята точка E, $DC = EC$. Докажите, что четырехугольник $ABCE$ является равнобедренной трапецией.

2°. Постройте прямоугольник по стороне и углу, который эта сторона образует с диагональю.

3. В ромбе $ABCD$ точка O является центром симметрии, а точки P и K принадлежат сторонам AB и BC соответственно так, что $OP \parallel BC$, $OK \parallel AB$.

а) Определите вид выпуклого четырехугольника $OPBK$.

б) Найдите угол BCA, если угол BPK равен 40°.

4*. Может ли выпуклый шестиугольник иметь четыре острых угла?

К—1 **Вариант 3**

1°. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = 30°$. На стороне BC взята точка E так, что $\angle CDE = 60°$. Докажите, что четырехугольник $ABED$ является прямоугольной трапецией.

2°. Постройте квадрат по его периметру.

3. На сторонах AB, BC, CD, AD ромба $ABCD$ взяты точки P, K, H, M соответственно. Каждая из прямых PM, KH, PK параллельна одной из осей симметрии ромба. Диагональ AC пересекает отрезок PM в точке E, а отрезок KH — в точке T.

а) Докажите, что диагонали четырехугольника $EPKT$ равны.

б) Определите вид выпуклого четырехугольника $MPKH$.

4*. Чему равна сумма углов, отмеченных на рисунке 34?

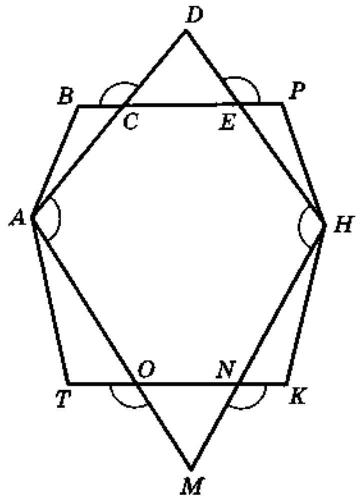

Рис. 34

К—1 **Вариант 4**

1°. В трапеции $ABCD$ на большем основании AD взята точка E. Известно, что $\angle ABC = 130°$, $\angle BCE = 50°$. Докажите, что отрезки AC и BE имеют общую середину.

2°. Постройте ромб по диагонали и углу между стороной и этой диагональю.

3. Ось симметрии прямоугольника $ABCD$ пересекает его стороны BC и AD в точках M и K соответственно. На стороне AB взята точка P, на стороне CD — точка T, причем $PM \parallel KT$, $PM = PK$.

а) Определите вид выпуклого четырехугольника $PMTK$.

б) Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей четырехугольника $PMTK$ до точки C равно PK.

4*. В некотором выпуклом n-угольнике сумма $n - 1$ углов равна $359°$. Найдите n.

К—2 Вариант 1

1°. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AE = 4$ см, $ED = 5$ см, $BE = 12$ см, $BD = 13$ см. Докажите, что треугольник BED прямоугольный, и найдите площадь параллелограмма.

2°. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CE, $CE = 12$ см, $BE = 9$ см, $AK = 10$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A = 30°$, высота BK равна 1 см, $BC = 2\sqrt{3}$ см.

а) Найдите площадь трапеции.

б) Найдите площадь треугольника KMD, если M — середина отрезка BD.

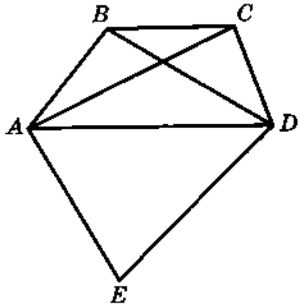

Рис. 35

4*. На рисунке 35 площади четырехугольников $ABDE$ и $ACDE$ равны. Докажите, что $BC \parallel AD$.

К—2 Вариант 2

1°. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, $\angle A = 90°$, $BC = 4$ см, $CD = 10$ см. Высота CK равна 8 см. Найдите площадь трапеции.

2°. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $BC = 13$ см. На стороне AC взята точка D так, что $DC = 5$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что треугольник BDC прямоугольный, и найдите площадь треугольника ABC.

3. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, диагональ BD перпендикулярна к стороне AB. Прямая, проходящая через середину отрезка BD — точку M параллельно AD, пересекает сторону AB в точке K, $MK = 4$ см.

а) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

б) Найдите площадь треугольника AMD.

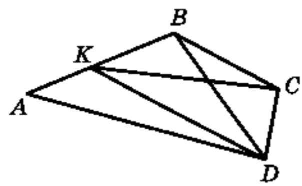

Рис. 36

4*. На рисунке 36 $BC \parallel KD$. Докажите, что площадь четырехугольника $AKCD$ равна площади треугольника ABD.

К—2 **Вариант 3**

1°. В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, CK — высота, $AB = 5$ см. На отрезке AK взята точка E так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Определите вид треугольника ABE и найдите площадь трапеции.

2°. В треугольнике ABC угол A тупой, BK и CD — высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

3. В ромбе $ABCD$ $AC = 10$ дм, $BD = 24$ дм. Высота AK проведена к стороне BC.

а) Найдите AK.

б) Найдите площадь треугольника AOM, если O — точка пересечения диагоналей ромба, M — середина стороны AB.

4*. На рисунке 37 площади четырехугольников $ABCP$ и $DTBC$ равны. Докажите, что $TP \parallel AD$.

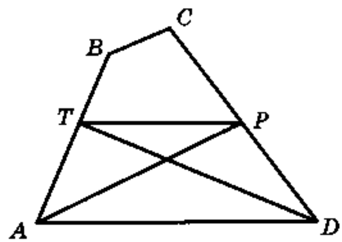

Рис. 37

К—2 **Вариант 4**

1°. В параллелограмме $ABCD$ BK и BT — высоты. Точки K и T принадлежат сторонам AD и DC, $BK = 10$ см, $BT = 9$ см, $TC = 12$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2°. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, угол C тупой, $BC = 17$ см. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D так, что $CD = 8$ см, $BD = 15$ см. Докажите, что треугольник BCD прямоугольный, и найдите площадь треугольника ABD.

3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, боковая сторона CD перпендикулярна диагонали AC, $CD = 3$ см, $AD = 5$ см.

а) Найдите площадь трапеции.

б) Найдите площадь треугольника AMD, если M — середина CD.

4*. На рисунке 38 площади невыпуклых пятиугольников $ABOCD$ и $AODCB$ равны. Докажите, что $AB \parallel DC$.

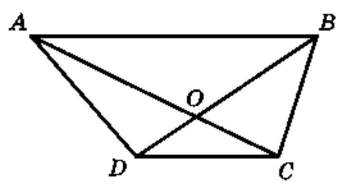

Рис. 38

К—3 Вариант 1

1°. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ все стороны имеют разные длины. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O, $OC = 5$ см, $OB = 6$ см, $OA = 15$ см, $OD = 18$ см.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

б) Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M соответственно, причем $\angle KMC + \angle A = 180°$.

а) Докажите, что $\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC}$.

б) Найдите отношение $AB : BM$, если площадь четырехугольника $AKMC$ относится к площади треугольника BKM как $8 : 1$.

3*. В трапеции $ABCD$ на меньшем основании BC и на боковой стороне CD взяты точки E и K соответственно, а на отрезке AE отмечена точка O. Найдите отношение $\frac{AB}{BE}$, если $KC = 2$ см, $KD = 3$ см, $OK \parallel AD$, $\angle OBA = \angle OBE$.

К—3 Вариант 2

1°. Через точку M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная высоте BD и пересекающая сторону BC в точке P; $BM = 5$ см, $BP = 8$ см, $BC = 24$ см.

а) Найдите AB.

б) Найдите отношение площадей треугольников MPB и ABC.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD делит угол B пополам, $\frac{BD^2}{BC} = AB$.

а) Докажите, что $\angle BAD = \angle BDC$.

б) Найдите отношение площадей четырехугольника $ABCD$ и треугольника ABD, если $DC = 1{,}5AD$.

3*. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки P и K соответственно так, что $PK \parallel AD$, $\angle DBK = \angle KBC$, $BC : BD = 3 : 4$. Найдите $BP : PA$.

К—3 Вариант 3

1°. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки D, E, P соответственно, $AB = 9$ см, $AD = 3$ см, $AP = 6$ см, $DP = 4$ см, $BE = 8$ см, $DE = 12$ см.

а) Докажите, что $DE \parallel AC$.

б) Найдите отношение площадей треугольников DBE и ADP.

2. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$. Высота CE делит основание AD на два равных отрезка, точка O — середина отрезка AC.

а) Докажите, что $\frac{BO}{BC} = \frac{CD}{AD}$.

б) Найдите площадь треугольника ACD, если площадь невыпуклого пятиугольника $AOBCD$ равна S.

3*. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и K соответственно так, что $\angle MKB = \angle A$. Отрезок BO является биссектрисой треугольника MBK, $MO = 2$ см, $OK = 3$ см. Найдите отношение $BC : AB$.

К—3 Вариант 4

1°. В трапеции $ABCD$ точка O — середина меньшего основания BC. Прямые AO и CD пересекаются в точке E, $AD = 6$ дм, $BC = 4$ дм.

а) Найдите отношение $\frac{EC}{CD}$.

б) Найдите отношение площадей треугольников EOC и AED.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = 2BC$, $AC = CD$, O — середина AC, $\angle OBC = \angle OCB$.

а) Докажите, что $BC \parallel AD$.

б) Найдите отношение площадей треугольника BOC и выпуклого пятиугольника $AOBCD$.

3*. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E. Биссектриса BK этого треугольника пересекает отрезок DE в точке T, $DT = 3$ дм, $TE = 4$ дм, $AK = 8$ дм, $KC = 6$ дм. Докажите, что $\angle C = \angle BDE$.

К—4 Вариант 1

1°. На рисунке 39 $BC \perp AC$, $EC \perp MB$, O — точка пересечения медиан треугольника ABC, $MC = 30$ мм, $ME = 20$ мм. Найдите $\cos EMC$ и OM.

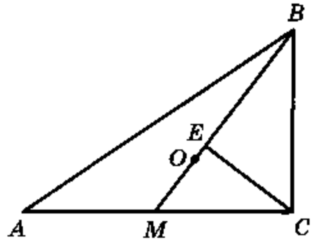

Рис. 39

2°. Постройте отрезок, равный $\frac{2}{5}$ данного отрезка.

3. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp BD$, точки M и K — середины отрезков BC и CD соответственно, $MK = \sqrt{5}$ см, $AD = 2\sqrt{10}$ см.

а) Найдите $\angle DBC$.

б) Найдите BE, если CE — высота треугольника BCD, а тангенс угла ECD равен 3.

4*. Будут ли подобны внешний и внутренний прямоугольники рамки для картины, если ее ширина в любом месте одинакова?

К—4 Вариант 2

1°. На рисунке 40 $AB \perp BC$, $BD \perp AC$, точки E и T — середины отрезков BD и BC, $AD = 25$ дм, $ET = 8$ дм. Найдите BD и $\operatorname{tg} A$.

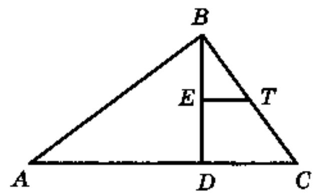

Рис. 40

2°. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Постройте отрезок AB такой, что $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_3Q_3}{AB}$.

3. В треугольнике ABC медиана BD составляет со стороной BC угол DBC, равный 60°. Точка пересечения медиан удалена от прямой BC на $\sqrt{3}$ см.

а) Найдите BD.

б) Найдите AB, если $\angle ABD = 30°$.

4*. Прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, разделяет этот прямоугольник на два. Может ли один из образовавшихся прямоугольников быть подобным данному?

К—4 Вариант 3

1°. На рисунке 41 $\angle BCA = 90°$, O — точка пересечения медиан треугольника ABC, $\angle COM = 90°$, $OM = \sqrt{2}$ дм. Найдите OC и $\operatorname{tg} OBC$.

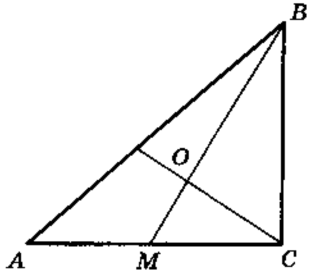

Рис. 41

2°. Постройте отрезок, равный $\frac{6}{5}$ данного отрезка.

3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$. Расстояние между серединами большего основания AD и боковой стороны CD равно $\sqrt{18}$ см, $BC = 6$ см.

а) Найдите угол CAD.

б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC, если тангенс угла ACD равен 2.

4*. Можно ли разрезать квадрат на два подобных неравных прямоугольника?

К—4 Вариант 4

1°. На рисунке 42 $AC \perp BC$, $CD \perp MB$. Точки E и K — середины отрезков AB и AM, $EK = 12{,}5$ см, $DM = 9$ см. Найдите CM и $\sin MBC$.

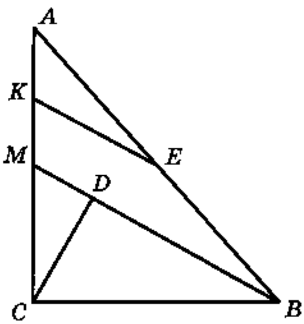

Рис. 42

2°. Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте отрезок AB так, чтобы $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{P_2Q_2}{AB}$.

3. В треугольнике ABC BD — медиана, O — точка пересечения медиан, $\angle BDC = 60°$. Из точки O опущен перпендикуляр OM к прямой AC, $OM = 2\sqrt{3}$ дм.

а) Найдите BD.

б) Найдите расстояние от точки пересечения прямых OM и AB до вершины A, если $\angle ABD = 30°$.

4*. Можно ли разрезать прямоугольник на два подобных неравных прямоугольника?

К—5 Вариант 1

1°. В равностороннем треугольнике сторона равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

2°. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка O пересечения серединных перпендикуляров удалена от прямой AB на 6 см. Найдите $\angle OBA$ и радиус окружности, если $\angle AOC = 90°$, $\angle OBC = 15°$.

3. В параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 45°, и стороной AD, равной $10\sqrt{2}$ дм, вписана окружность.

а) Найдите радиус окружности.

б) Найдите с помощью микрокалькулятора сумму расстояний от вершины D до точек касания окружности с прямыми AD и DC.

4*. Даны окружность диаметра AB и точка O внутри нее. Используя только линейку без делений, опустите перпендикуляр из точки O на прямую AB.

К—5 Вариант 2

1°. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120°$. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 2 см. Найдите сторону AB.

2°. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность с центром O, касающаяся сторон треугольника AB, BC, AC в точках M, T, P соответственно. Расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника ABC до вершины C равно $\sqrt{8}$ см. Найдите радиус окружности, угол TOP и угол TMP.

3. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса 4 см, параллельны и имеют равные длины, $\angle ADB = 60°$.

а) Найдите AB.

б) Какие значения может принимать угол MBC, если M — точка окружности — равноудалена от концов отрезка BC?

4*. Даны два отрезка PQ и ET ($ET > PQ$). Постройте четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = PQ$, $BD = ET$, диагонали пересекаются в точке O и $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.

К—5 Вариант 3

1°. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 1 см. Найдите расстояние от точки касания окружности и прямой AC до вершины A.

2°. В треугольнике ABC с тупым углом B O — точка пересечения серединных перпендикуляров, $AC = 4\sqrt{2}$ дм, $\angle AOC = 90°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, и $\angle ABC$.

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O и радиуса 6 см, $\angle CAD = 45°$, $\angle ACD = 90°$.

а) Найдите сумму $BC + AD$, если $AB = 10\sqrt{2}$ см.

б) Найдите произведение $OC \cdot OD$.

4*. Даны окружность диаметра AB и точка O вне ее. Используя только линейку без делений, опустите перпендикуляр из точки O на прямую AB.

К—5 Вариант 4

1°. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $\sqrt{8}$ см, а два угла треугольника равны по 45°. Найдите стороны треугольника ABC.

2°. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120°$, O — точка пересечения биссектрис. Окружность радиуса $2\sqrt{3}$ см вписана в этот треугольник и касается прямых BC и AC в точках D и E соответственно. Найдите BO и $\angle BED$.

3. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, $\angle A = 60°$, $\angle ABD = 90°$, $CD = 4$ см.

а) Найдите радиус окружности.

б) Какие значения может принимать угол BMC, если M — произвольная точка окружности?

4*. Даны два отрезка PQ, ET и угол H. Постройте четырехугольник $ABCD$, в котором O — точка пересечения диагоналей, $BO = PQ$, $DO = ET$, $\angle DOC = \angle H$ и $AO \cdot OC = DO \cdot OB$.

К—6 Вариант 1

1°. Начертите параллелограмм $ABCD$ и постройте векторы $\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$, $\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$.

2. В треугольнике ABC B_1 — середина AC, M — точка пересечения медиан.

а)° Выразите $\overrightarrow{MB_1}$ через $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MC}$.

б) Выразите $\overrightarrow{CM}$ через $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

в) Выразите $\overrightarrow{MA_1}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A_1 \in BC$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.

г)* Используя векторы, покажите, что середина отрезка BB_1 лежит на прямой AA_1, если $A_1 \in BC$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.

К—6 Вариант 2

1°. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от разных точек. Постройте векторы $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как 3 : 1. Диагонали трапеции пересекаются в точке O.

а)° Выразите $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AO}$.

в) Выразите $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{DM}$, если точки E и M — середины сторон AB и BC соответственно.

г)* Докажите, что $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$, если точка E — середина стороны AB.

К—6 **Вариант 3**

1°. Начертите треугольник ABC и постройте векторы $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и $\frac{1}{5}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC, отрезки BD и AM пересекаются в точке O.

а)° Выразите $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

в) Выразите $\overrightarrow{OD}$ через $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AM}$, если P — середина отрезка CD.

г)* Докажите, что $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AB$, если P — середина отрезка CD.

К—6 **Вариант 4**

1°. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от разных точек. Постройте векторы $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

2. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как $1 : 2$, E — середина стороны CD, O — точка пересечения диагоналей.

а)° Выразите $\overrightarrow{OE}$ через $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

б) Выразите $\overrightarrow{BO}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

в) Выразите $\overrightarrow{CO}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

г)* Используя векторы, докажите, что точка M, делящая отрезок AE в отношении $1 : 4$, считая от точки E, принадлежит прямой BD.

К—7 Вариант 1

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и B — прямые, $BC = 6$, $AD = 8$, $AB = 2\sqrt{3}$.

а)° Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

б)° Найдите углы C и D четырехугольника $ABCD$.

в)° Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD.

г)° Выясните, можно ли вписать в четырехугольник $ABCD$ окружность.

д)° Выясните, можно ли провести окружность через точки A, B, C, D.

е) Выясните, подобны ли треугольники ABC и ACD.

ж) Выразите вектор $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{5}$ раз больше данного отрезка.

К—7 Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен $120°$, точки M и H — середины сторон AB и BC соответственно, $AC = 4\sqrt{3}$.

а)° Найдите площадь треугольника ABC.

б)° Найдите расстояние между серединами отрезков AM и HC.

в)° Докажите, что треугольники ABC и MBH подобны, и найдите отношение их площадей.

г)° Выразите вектор $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{HB}$.

д)° Выясните, можно ли провести окружность через точки A, M, H, C.

е) Найдите синус угла HME, если точка E — основание перпендикуляра HE, проведенного к прямой AC.

ж) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBH.

2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{12}$ раз больше данного.

К—7 **Вариант 3**

1. На окружности с центром O и диаметром AB, равным 4, взята точка M, расположенная ближе к точке A, чем к точке B. Через точку M проведена касательная к окружности, а через точки A и B — лучи, перпендикулярные к AB и пересекающие касательную в точках D и C соответственно, $\angle DCB = 60°$.

а)° Найдите углы OCB, ADC, ODC.

б)° Найдите отрезки AD и CB.

в)° Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

г)° Найдите углы четырехугольника $MOBC$.

д)° Докажите, что треугольники AOD и COB подобны.

е) Докажите, что расстояние от точки O до середины отрезка DC равно $0{,}5\,(MD + BC)$.

ж) Выразите $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OC}$.

2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{14}$ раз больше данного.

К—7 **Вариант 4**

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 45°$, $AD = 4$. На продолжении стороны AB отложен отрезок BP так, что угол PDA равен $90°$. Отрезки BC и PD пересекаются в точке T, $PT : TD = 3 : 1$.

а)° Докажите, что треугольники BPT и TCD подобны, и найдите отношение их площадей.

б)° Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

в)° Найдите расстояние между серединами отрезков AB и TD.

г)° Выясните, можно ли провести окружность через точки A, B, T, D.

д)° Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{TB}$.

е) Найдите синус угла CAD.

ж) Найдите градусные меры дуг, на которые точки касания делят окружность, вписанную в треугольник BPT.

2*. Постройте отрезок, длина которого в $\sqrt{3}$ раз меньше данного.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ[1]

МД-1

ВАРИАНТ 1

1. Найдите углы четырехугольника, если три угла его равны между собой, а четвертый меньше одного из них на 40°.
2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 40°$. Точка E лежит на стороне BC, причем $\angle BAE = 20°$, $EC = 2$ см, $AB = 10$ см. Найдите AD.
3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 10 см. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O и соответственно равны 14 см и 10 см. Найдите периметр треугольника AOB.
4. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AB \parallel CD$; $\angle CBD = 15°$. Чему равен угол BDA?
5. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD от вершин A и C отложены равные отрезки AF и CE. В четырехугольнике $FBED$ $\angle BFD = 50°$. Чему равен угол BED?
6. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O; $\angle COD = 60°$, $CD = 10$ см. Чему равны диагонали прямоугольника?
7. Угол между высотами ромба, проведенными из одной из его вершин, равен 30°. Высота ромба равна 5 см. Найдите периметр ромба.
8. В квадрате сумма расстояний от его центра до сторон равна 20 см. Чему равен периметр квадрата?
9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) диагонали взаимно перпендикулярны. $BE \perp AD$; $ED = 4$ см. Чему равна высота трапеции?
10. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 45°$ ($\angle C = 90°$); E — середина AB. Через точку E проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает BC в точке F; $EF = 10$ см. Найдите BC.

---

[1] Распределение математических диктантов по главам учебника:

МД-1	Четырехугольники	Гл. V
МД-2	Площадь	Гл. VI
МД-3	Подобные треугольники	Гл. VII
МД-4	Окружность	Гл. VIII
МД-5	Векторы	Гл. XI

ВАРИАНТ 2

1. Найдите углы четырехугольника, если три угла его равны между собой, а четвертый больше одного из них на 80°.
2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = 140°$. Точка F лежит на стороне BC, причем $\angle ADF = 70°$; $BF = 5$ см, $AD = 20$ см. Найдите AB.
3. В параллелограмме диагонали пересекаются в точке O. Сторона BC равна 18 см, $BD = 16$ см. Периметр треугольника BOC равен 38 см. Найдите длину диагонали AC.
4. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = AD$ и $BC \parallel AD$; $\angle BAC + \angle ACD = 80°$. Найдите эти углы.
5. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC от вершин B и D отложены равные отрезки BE и DF. В четырехугольнике $AECF$ диагонали пересекаются в точке O; $AC + EF = 30$ см. Найдите $AO + OF$.
6. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O; $\angle ACD = 60°$, $BD = 10$ см. Чему равна сторона CD?
7. Высота ромба делит его сторону пополам. Чему равен угол между высотами ромба, проведенными из одной из его вершин?
8. Периметр квадрата равен 80 см. Чему равно расстояние от его центра до стороны?
9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) диагонали взаимно перпендикулярны; $BK \perp AD$, $BK = 7$ см. Чему равна длина отрезка KD?
10. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B = 45°$ ($\angle C = 90°$), O — середина AB. Через точку O проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает BC в точке K; $BC = 18$ см. Найдите длину отрезка OK.

МД-2

ВАРИАНТ 1

1. Сторона квадрата равна 4 см. На его диагонали построен новый квадрат. Его площадь равна...
2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 12$ см, а сторона $AD = 10$ см; $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь параллелограмма.

3. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка M. Площадь треугольника BMC равна Q. Чему равна площадь треугольника MCD?

4. Основания треугольников равны, а высота одного из треугольников в три раза больше высоты другого. Найдите отношение площадей этих треугольников.

5. В треугольнике ABC AE и BD — высоты; $AC = 10$, $BD = 8$, $BC = 16$. Найдите AE.

6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $\angle CDA = 90°$; $BC = 2$ см, $AD = 6$ см, $AB = 10$ см, $\angle A = 30°$. Площадь трапеции равна...

7. В прямоугольнике диагональ равна 25, а одна из сторон — 15. Найдите катеты равновеликого ему равнобедренного прямоугольного треугольника.

8. В треугольнике ABC $AB = m$, $BC = n$ ($n > m$); BD — высота треугольника и $BD = h$. Найдите AC.

9. В ромбе один из углов равен 60°. Меньшая диагональ равна $\sqrt{3}$. Высота ромба равна...

10. Стороны треугольника равны 7, 24 и 25. Найдите площадь треугольника.

ВАРИАНТ 2

1. На диагонали квадрата построен новый квадрат, площадь которого равна 8 см^2. Сторона квадрата равна...

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 10$ см, а расстояние от вершины B до этой диагонали в два раза меньше ее длины. Найдите площадь параллелограмма.

3. В параллелограмме $ABCD$ на продолжении диагонали BD за точку D взята точка P. Площадь треугольника ADP равна S. Чему равна площадь треугольника CDP?

4. Высоты треугольников равны, а основание одного из них в два раза меньше другого. Найдите отношение площадей этих треугольников.

5. В треугольнике ABC BD и CF — высоты; $BD = 12$, $CF = 10$, $AC = 5$. Найдите AB.

6. В прямоугольной трапеции (AD и BC — основания) $\angle CDA = 90°$; $\angle A = 45°$, $BC = 2$, $CD = 6$. Площадь трапеции равна...

7. В прямоугольнике расстояния от точки пересечения диагоналей до вершин и до одной из его сторон соответственно равны 6,5 и 6. Найдите сторону равновеликого ему квадрата.

8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) точка D принадлежит стороне BC; $AB = a$, $AD = b$, $AC = m$. Найдите BD.

9. В ромбе один из углов равен 60°. Высота ромба равна $\sqrt{3}$. Найдите длину меньшей диагонали.

10. Стороны треугольника равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

МД-3

ВАРИАНТ 1

1. В треугольнике ABC $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$. AD — биссектриса угла A. Площадь треугольника ABD равна 9 см^2. Площадь треугольника ACD равна...

2. В треугольниках ABC и MPL $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle L$; $\frac{AB}{MP} = \frac{2}{3}$, $AC = 10$ см. Сторона ML равна...

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки E и F; $\frac{EB}{BF} = \frac{BC}{AB}$, $\angle BFE = 40°$. Чему равен угол A?

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{5}{2}$.

   Сумма площадей этих треугольников равна 58 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

5. В треугольнике ABC медианы AE и BF пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2. Найдите площадь треугольника ABO.

6. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2; DE — средняя линия ($D \in AB$; $E \in BC$). Найдите площадь трапеции $ADEC$.

7. CK — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$); $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. Как относятся площади треугольников AKC и BKC?

8. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = 12$, $AC = 10$. Найдите $\cos \angle A$ и $\sin \angle ABD$.

9. В ромбе $ABCD$ $\angle A = \alpha$; $AC = d$. Найдите сторону ромба.

10. Диагонали параллелограмма равны m и n, угол между ними равен 60°. Найдите площадь параллелограмма.

ВАРИАНТ 2

1. В треугольнике ABC BM — биссектриса. Площади треугольников ABM и CBM относятся как $1 : 3$, $AB = 4$ см. Сторона BC равна...

2. В треугольниках EPF и CDK $\angle P = \angle D$ и $\angle F = \angle K$; $\frac{EP}{CD} = \frac{2}{5}$, $DK = 10$ см. Сторона PF равна...

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки D и K; $\frac{BD}{BC} = \frac{BK}{AB}$, $\angle BCA = 50°$. Чему равен угол BDK?

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{9}{16}$; $AC + A_1C_1 = 14$ см. Найдите эти стороны.

5. В треугольнике ABC медианы BK и CD пересекаются в точке O. Площадь треугольника COK равна 30 см². Найдите площадь треугольника ABC.

6. EF — средняя линия треугольника ABC ($E \in AB$; $F \in AC$). Площадь трапеции $EBCF$ равна 9 см². Найдите площадь треугольника ABC.

7. CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$); $\frac{S_{ADC}}{S_{CDB}} = \frac{25}{36}$. Как относятся катеты AC и CB?

8. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$; $BD \perp AC$, $AB = 25$, $AC = 48$. Найдите $\sin \angle A$ и $\cos \angle ABD$.

9. В ромбе $ABCD$ $\angle A = \alpha$, сторона ромба равна a. Найдите диагональ AC.

10. Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2, угол между ними равен 45°. Найдите площадь параллелограмма.

ВАРИАНТ 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = 60°$, $BC = \sqrt{3}$. С центром в точке A проведена окружность, радиус которой равен 2,7. Сколько общих точек имеет эта окружность с прямой BC?

2. Дана окружность с центром в точке O. Радиус окружности равен 5 см. Прямая l касается окружности в точке A. На касательной от точки A отложен отрезок AB, равный 12 см. Отрезок OB пересекает окружность в точке K. Отрезок KB равен...

3. Из точки M к окружности с центром в точке O проведены две касательные MA и MB (A и B — точки касания). Радиус окружности равен $2\sqrt{3}$, $\angle AMB = 60°$. Расстояние между точками касания AB равно...

4. Вписанный в окружность угол BAC, равный 45°, опирается на дугу BC. Радиус окружности равен a. Найдите площадь треугольника BOC (O — центр окружности).

5. AB — хорда окружности. Прямая l касается окружности в точке A. На прямой l выбрана точка M такая, что $\angle MAB$ — тупой. Вписанный в окружность угол ACB опирается на дугу AB и равен 20°. Чему равен угол MAB?

6. Из точки C, перпендикулярной окружности, на диаметр AB опущен перпендикуляр CK; $AK = 2$, $CK = 4$. Чему равен отрезок KB?

7. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...

8. В прямоугольную трапецию $ABCD$ вписана окружность (AD и BC — основания); $CD \perp AD$, $\angle A = 30°$, $CD = 10$ см. Периметр трапеции равен...

9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.

10. Вокруг трапеции описана окружность. Один из ее углов равен 40°. Остальные углы трапеции равны...

ВАРИАНТ 2

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$, $AC = 2\sqrt{3}$. С центром в точке B проведена окружность, радиус которой равен 2,2. Сколько общих точек имеет эта окружность с прямой AC?

2. Прямая l касается окружности с центром O в точке P. Радиус окружности равен 8 см. На касательной от точки P отложен отрезок PM. Отрезок OM пересекает окружность в точке F; $FM = 9$ см. Отрезок PM равен...

3. Из точки P к окружности с центром в точке O проведены касательные PA и PB (A и B — точки касания); $\angle APB = 90°$. Расстояние между точками касания AB равно $\sqrt{5}$. Чему равно расстояние OP?

4. В окружность с центром в точке O вписан угол BAC, равный 30°; $BC = a$. Найдите площадь треугольника BOC.

5. PK — хорда окружности. Прямая m касается окружности в точке P. На прямой m выбрана точка F такая, что $\angle FPK = 160°$. Угол PDK вписан в окружность и опирается на дугу PK. Чему равен угол PDK?

6. Из точки P, принадлежащей окружности, на диаметр EF опущен перпендикуляр PK; $EK = 4$, $KF = 9$. Чему равен отрезок PK?

7. Стороны треугольника равны 13, 13 и 24. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...

8. В прямоугольную трапецию $ABCD$ вписана окружность (AD и BC — основания); $CD \perp AD$, $\angle A = 30°$. Периметр трапеции равен 24 см. Чему равны стороны AB и CD?

9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = \beta$, $AC = b$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.

10. Вокруг трапеции описана окружность. Один из ее углов равен 160°. Остальные углы трапеции равны...

МД-5

ВАРИАНТ 1

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. $M \in AD$.
   1) Какие из указанных векторов коллинеарны: $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CA}$?
   2) Какие из указанных векторов равны: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?
2. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.
3. Выразите вектор $\overrightarrow{FK}$ через векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EK}$.
4. При каких k верно равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$?
5. Векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ неколлинеарны. Найдите x и y из равенства $3\vec{a} + 5\vec{b} = x\vec{a} + (2y + 1)\vec{b}$.
6. В параллелограмме $ABCD$ $K \in AD$, причем $\dfrac{AK}{KD} = \dfrac{1}{2}$, P — середина AB. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{BC}$.
7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 10$; $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$. Найдите $|\overrightarrow{CM}|$.
8. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найдите какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.
9. В трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) EF — средняя линия. Выразите $\overrightarrow{EF}$ через $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.
10. В равнобедренную трапецию с углом 30° вписана окружность. Средняя линия трапеции равна 12. Чему равен радиус вписанной окружности?

ВАРИАНТ 2

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $E \in AB$.
   1) Какие из указанных векторов коллинеарны: $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DB}$?
   2) Какие из указанных векторов равны: $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

2. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{KC}$.

3. Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PK}$.

4. При каких k верно равенство
$$\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EC} = k\,(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})?$$

5. Векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ неколлинеарны. Найдите x и y из равенства $(2x-6)\,\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} + (y-3)\,\vec{b}$.

6. В параллелограмме $ABCD$ $E \in BC$, причем $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$, F — середина AB. Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AD}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 14$; $2\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Найдите $|\overrightarrow{BF}|$.

8. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{n}$. Найдите какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла, вертикального с углом AOB.

9. В трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) PK — средняя линия. Выразите вектор $\overrightarrow{PK}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

10. В равнобедренную трапецию с углом 30° вписана окружность с радиусом, равным 6 см. Чему равна средняя линия трапеции?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ
(по материалам математических олимпиад, проведенных в Санкт-Петербурге)

1. Докажите, что длина медианы, выходящей из тупого угла треугольника, меньше четверти периметра этого треугольника.

2. В трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $AB = BC$, $AC = CD$ и $BC + CD = AD$. Найдите углы трапеции.

3. Из точки M, взятой вне угла A, проведены к нему две секущие прямые, одна из которых отсекает на сторонах угла два равных отрезка AB и AC, а другая пересекает эти стороны в точках D и E соответственно. Докажите, что $\frac{BD}{CE} = \frac{MD}{ME}$.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle CBD$ и $\angle ACD = \angle BDA$. Докажите, что $AC^2 = BC^2 + AD^2$.

5. M — середина медианы AD треугольника ABC, имеющего площадь S. Прямая BM пересекает сторону AC в точке F. Найдите площадь треугольника AMF.

6. Средняя линия трапеции делится одной из диагоналей в отношении k $(0 < k < 1)$ и делит трапецию на две части, меньшая из которых имеет площадь S. Найдите площадь трапеции.

7. В треугольнике ABC угол при вершине C прямой. Известно, что отношение длин медиан, проведенных из вершин A и C, равно $\sqrt{\frac{17}{5}}$. Найдите отношение длин катетов.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и в нем проведена высота CD; $AB = c$; $DB = n$; $DA = m$. Докажите, что
$$\frac{m}{P_{ADC}} + \frac{m}{P_{DBC}} + \frac{c}{P_{ABC}} = 1.$$

9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, диаметр вписанной окружности d. Докажите, что $d \leqslant c(\sqrt{2} - 1)$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CK, а в треугольнике ACK — биссектриса CE. Докажите, что $CB = BE$.

11. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $S_{ABP} = S_{BCP} = S_{ACP}$. Докажите, что P — точка пересечения медиан треугольника.

12. Две окружности касаются в точке A. К окружностям проведены параллельные касательные к первой — в точке B, ко второй — в точке C, причем точка A не лежит между касательными. Докажите, что угол BAC прямой.

13. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены отрезки AC и AD, каждый из которых, являясь хордой одной окружности, касается другой окружности. Докажите, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

14. Найдите множество точек касания двух окружностей, которые касаются данной прямой в двух данных точках.

15. Окружность с центром в точке O касается сторон прямого угла с вершиной C в точках M и N. К окружности в некоторой точке K проведена касательная, пересекающая CM и CN соответственно в точках A и B. Докажите, что величина $(AB + AC) \cdot (AB + BC)$ не зависит от положения точки K.

16. Трапеция $ABCD$ такова (AD и BC — основания), что круги, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга. Докажите, что в трапецию можно вписать окружность.

17. В треугольнике ABC $\angle B = \angle C = 40°$. Докажите, что если BD — биссектриса угла B, то $BD + DA = BC$.

18. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

19. Дан треугольник ABC. На его сторонах построены параллелограммы $AKLB$, $AMNC$ и $BCQP$. Докажите, что из отрезков KM, LP и QN можно составить треугольник.

20. Биссектрисы треугольника делятся точкой пересечения в одном и том же отношении, считая от вершины. Докажите, что треугольник равносторонний.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Самостоятельные работы

С—1

Вар. 1. **2.** 140°.

Вар. 2. **2.** 5.

Вар. 3. **1.** Периметры равны.

Вар. 4. **1.** Периметры равны.

Вар. 5. **1.** Периметры равны. **2.** $\frac{2n-2}{n-2} = k$, откуда $2 + \frac{2}{n-2} = k$. Значит, $n - 2 = 1$ или $n - 2 = 2$. Так как k нечетное, то $k = 3$.

Вар. 6. **1.** Периметры равны. **2.** Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5. Ответ. $k = 2$.

Вар. 7. **1.** Нет, не существует. Можно доказать, что число диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Тогда $n(n-3) = 50$, или $n(n-3) = 2 \cdot 5 \cdot 5$, чего быть не может.

2. Можно доказать, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°. Тогда такой многоугольник может иметь не более двух внешних углов, больших 170°. Это означает, что острых углов с градусной мерой, меньшей 10°, может быть не более двух. Случай наличия двух таких углов реализуется для треугольника с углами 1°, 2°, 177°.

Вар. 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Ответ. Существует, девятиугольник имеет 27 диагоналей. **2.** $n = 6$.

С—2

Вар. 1. **1.** 28 см. **2.** 30°, 120°.

Вар. 2. **1.** 10 см. **2.** 30°, 150°.

Вар. 3. **2.** 60°, 120°; $BM = AH$.

Вар. 4. **2.** 60°, 120°; $AM = CK$.

Вар. 5. **1.** Докажите сначала, что $OK = OM$.

2. В четырехугольнике $MOHC$ $\angle MOH = 155°$, $\angle OHC = 85°$, $\angle OMC = 90°$. Значит, $\angle C = 30°$. Тогда $MD = 0{,}5CD$ и $MD = 0{,}5AB$. Углы параллелограмма равны 30° и 150°.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам варианта 5.

2. Углы параллелограмма равны 60° и 120°.

Вар. 7. **1.** Последовательно доказываем, что $\triangle BOE = \triangle KOD$, $\triangle BDE = \triangle BKE$, $ED \parallel BK$, $ED = BK$, $\triangle BKE = \triangle BED$, $\angle BKE = \angle BDE$, $\angle KEB = \angle DBE$. Значит, $OB = OE$.

2. В параллелограммах $ADEH$ и $KDEB$ $AH = DE$ и $KB = DE$. Значит, $AH = KB$. Следовательно, $AK = HB$.

Вар. 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7, $\angle KBE = 90°$.

2. Докажите сначала, что $EK = BD = MP$.

С—3

Вар. 5. **1.** Докажите, что $\triangle MBK = \triangle KCE$, $AMEC$ — параллелограмм и $MK = KE$.

2. Докажите, что четырехугольники $ABMK$ и $MKDC$ являются параллелограммами.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. Докажем последовательно, что $\triangle BPK = \triangle MED$, $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $ABCD$ — параллелограмм.

2. Отметим на отрезке OC точку E так, что $AO = OE$. Тогда четырехугольник $ABED$ будет параллелограммом. Используя теорему о внешнем угле треугольника, докажем, что $\angle BED > \angle BCD$. Значит, $\angle BAD > \angle BCD$.

Вар. 8. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 7. В задаче 2 доказательство проведите методом от противного.

С—4

Вар. 1. 1. 60°, 120°, 50°, 130°. 2. 20 см.

Вар. 2. 1. 60°, 120°, 40°, 140°. 2. 30 см.

Вар. 3. 1. 40°, 140°. 2. 1 : 2.

Вар. 4. 1. 60°, 120°. 2. 1 : 2.

Вар. 5. 1. $AE = AD - ED = AD - 0{,}5\,(AD - BC) = 0{,}5\,(AD + BC)$.

2. Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, AD — большее основание, диагонали пересекаются в точке O, $\angle ABD = 60°$, $\angle AOD = 90°$. Тогда $\angle ADO = \angle CBO = 30°$, $AD = 2AO$, $BC = 2CO$. Значит, $AC = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Вар. 6. 1. Проведем через точку O — точку пересечения диагоналей трапеции — перпендикуляры OK и OM к прямым BC и AD соответственно. Тогда $OK = 0{,}5BC$ и $OM = 0{,}5AD$, так как треугольники BOC и AOD равнобедренные и прямоугольные. Значит, $KM = 0{,}5\,(AD + BC)$.

2. Продлите большее основание до пересечения с лучом.

Вар. 7. 1. Пусть в трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Через вершину B проведем прямую, параллельную CD, пересекающую AD в точке E. Тогда $AE < AB + BE$. Значит,

$$AB + CD > AD - BC.$$

2. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC O — точка, равноудаленная от всех сторон. Проведем перпендикуляры OK, OM, OP, OE к прямым BC, CD, AD, BA соответственно. Из равенства треугольников следует, что $KC = MC$. Аналогично $MD = PD$, $AP = AE$, $BE = BK$. Значит, $BC + AD = AB + CD$.

Вар. 8. 1. Пусть в трапеции $ABCD$ AD — большее основание. На продолжении отрезка AD за вершину D отметим точку E так, чтобы прямые BD и CE были параллельны. Тогда $AC + CE > AE$. Значит, $AC + BD > AD + BC$.

2. На рисунке 43 $ABCD$ — трапеция. Точка O равноудалена от вершин трапеции. По теореме о сумме углов многоугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$. Но $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 8$. Значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$, т. е. $\angle BCD + \angle BAD = 180°$. Аналогично $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

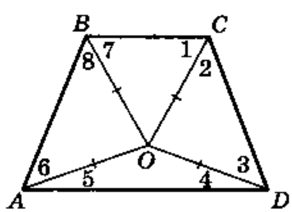

Рис. 43

С—5

Вар. 5. **1.** Один из треугольников, на которые данная диагональ разделяет искомый параллелограмм, строится по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них. Затем построенный треугольник достраивается до параллелограмма.

2. Пусть требуется построить равнобедренную трапецию $ABCD$ с большим основанием AD по отрезку AC, углу BAD и перпендикуляру AK, проведенному к прямой BC. Сначала строим треугольник AKC по катету и гипотенузе, затем проводим прямую AD параллельно прямой KC и на отрезке KC отмечаем точку B так, что $\angle BAD$ равен данному. Далее треугольник ABC достраиваем до трапеции.

Вар. 6. **1.** Пусть требуется построить параллелограмм $ABCD$, в котором O — точка пересечения диагоналей. Треугольник AOB строится по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них. Затем этот треугольник достраивается до параллелограмма.

Вар. 7. **1.** Один из треугольников, на которые данная диагональ разделяет параллелограмм, строится по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Затем этот треугольник достраивается до параллелограмма.

2. Пусть следует построить трапецию $ABCD$ с бóльшим основанием AD, в которой O — точка пересечения диагоналей, по отрезкам AC, BD, CD и углу AOD. Рассмотрим треугольник CAE, где $E \in AD$, $CE \parallel BD$. В этом треугольнике $BD = CE$, $\angle ACE = \angle AOD$. Значит, треугольник CAE можно построить по двум сторонам и углу между ними. Точку D можно получить, проведя окружность с центром в вершине C и радиуса CD. Далее треугольник ACD достраивается до трапеции.

Вар. 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 варианта 7.

2. В задаче выполняется дополнительное построение, аналогичное построению в задаче 1 варианта 7 С—4.

С—6

Вар. 1. 1. 140°. **2.** 75°.

Вар. 3. 1. 5 см. 2. 90°.

Вар. 4. 1. 60°. 2. 90°.

Вар. 5. 1. $2KE = KD$. Значит, $\angle ADB = 30°$ и треугольник ABO равносторонний, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника, $AP = 0{,}5AM$. Значит, $AP = 0{,}25AO$, $AP : PC = 1 : 7$.

2. Из условия задачи следует, что $MK = \frac{AC}{2}$, $AP = \frac{AC}{4}$. Отметим на отрезке AC точку E так, чтобы $EC = AP$. Тогда $PE = MK$ и $\triangle APM = \triangle EKC$. Значит, четырехугольник $PMKE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно равны. Но $PK = ME$ из равенства треугольников AME и CPK. Следовательно, $PMKE$ — прямоугольник и $\angle PMK = 90°$.

Вар. 6. 1. $BO : PH = 1 : 4$. 2. 90°. Задачи решаются аналогично задачам 1, 2 из варианта 5.

Вар. 7. **1.** Пусть O — точка пересечения диагоналей данного прямоугольника. Тогда $\angle ACD = 75°$, $\angle EDC = 90°$, $\angle EOD = 30°$, $ED = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4}$, $BE < ED + BD = 5ED$.

2. Пусть окружность пересекает прямую BD в точке P. Тогда четырехугольник $AECP$ является прямоугольником, $\angle AEC = 90°$. С помощью свойства внешнего угла треугольника можно доказать, что $\angle ABC = \angle AEC + \angle BAE + \angle BCE = 150°$. Значит, $\angle BAD = 30°$. Искомое расстояние равно 5 см.

Вар. 8. **1.** $\angle MKE = 15°$. Значит, $ME = EK$ и $MT = TK$. Следовательно, $PT > 0{,}5KH > 0{,}49KH$.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7, $HB = 10$ см.

С—7

Вар. 1. **1.** 15°30′, 74°30′, 90°.

Вар. 2. **1.** 90°, 73°30′, 147°.

Вар. 3. **1.** 90°. **2.** $3a$.

Вар. 4. **1.** 90°. **2.** $2a$.

Вар. 5. **1.** Докажите, что диагональ AC составляет со стороной ромба угол в 30°, $\angle AOB = 120°$.

2. Треугольники AKD и MCD равны. Значит, $\angle MDK + \angle AKD = 90°$. Но $\angle AOD = \angle AKD + \angle MDK$ по свойству внешнего угла треугольника OKD. Значит, $\angle AOD = 90°$, $\angle AMO = 60°$.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам 1, 2 варианта 5. Ответ. **1.** a. **2.** $MP = AK$.

Вар. 7. **1.** На рисунке 44 изображены ромбы, данные в условии задачи, $CM = MD$. Следует доказать, что угол MPD_1 прямой. Проведем $MK \perp OC$, $ME \perp OD$. Так как $\triangle CKM = \triangle MED$, то $ME = OK = CK$ и $\angle MCO = \angle MOC$. Значит, $\angle POD_1 = \angle OCM$. Тогда $\angle POD_1 + \angle PD_1O = 90°$, $\angle PD_1O = \angle ODC$ и $OP \perp A_1D_1$.

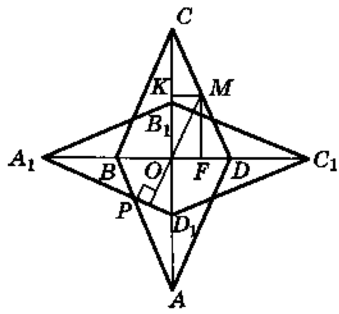

Рис. 44

2. Пусть ME, CO, PD — перпендикуляры к прямой AB. Тогда можно доказать, что $\triangle MAE = \triangle AOC$ и $\triangle BOC = \triangle BPD$, причем $ME = AO$, $PD = BO$.

Вар. 8. **1.** Пусть O_1 — точка пересечения диагоналей ромба $AB_1C_1D_1$. Тогда четырехугольник $AOEO_1$ является квадратом и прямая OO_1 содержит отрезок PO. Точки A и E являются концами другой диагонали квадрата. Значит, $PA = PE$.

2. Пусть прямые TC и AB пересекаются в точке O. Обозначим $\angle MTC = \alpha$. Тогда $\angle TCP = \alpha = \angle ACO$. Треугольники ACB и MCT равны по двум катетам. Значит, $\angle OBC = \alpha$, $\angle OCB = 90 - \alpha$. Поэтому $\angle COB = 90°$.

С—8

Вар. 5. **2.** Сначала постройте треугольник ABE по $\angle ABE = 90°$, $\angle BAE = \frac{90°}{4}$ и стороне AE, а затем достройте этот треугольник до квадрата.

Вар. 6. **2.** Сначала постройте треугольник BMD по углу MBD, углу BMD, равному $180° - \angle MBD - 45°$ и стороне $BM = PQ$. А затем достройте этот треугольник до квадрата.

Вар. 7. **1.** Пусть требуется построить прямоугольник $ABCD$ по диагонали AC и периметру P. На продолжении стороны BC за вершину B отметим точку M так, чтобы выполнялось равенство $AB = MB$. Тогда треугольник AMC можно построить по стороне MC, равной $\frac{P}{2}$, стороне AC и углу M, равному $45°$. Затем треугольник AMC достраивается до прямоугольника.

2. Пусть требуется построить квадрат $ABCD$. На диагонали BD возьмем точку M так, чтобы $MD = AD$. Тогда в треугольнике BMA $BM = BD - AD$, $\angle ABD = \frac{90°}{2}$, $\angle BMA = \frac{5}{4} \cdot 90°$. Сначала построим треугольник BMA, а затем достроим его до квадрата.

Вар. 8. **1.** Пусть требуется построить ромб $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O, в котором AC — меньшая диагональ. На отрезке OB возьмем точку M так, чтобы $OM = OC$. Тогда $\angle BMC = \frac{3}{4} \cdot 90°$, $BM = \frac{BD - AC}{2}$. Значит, сначала можно построить треугольник BMC, а затем достроить его до ромба.

2. Пусть требуется построить квадрат $ABCD$. Продлим отрезок AC за вершину A и отложим на продолжении отрезок $AE = AD$. Треугольник ECD можно построить по стороне EC, равной $AC + AD$, $\angle E = \frac{90°}{4}$, $\angle ECD = \frac{90°}{2}$. Затем достроим этот треугольник до квадрата.

С—9

Вар. 1. **1.** $(a + b + c)(l + f) - f^2 + \frac{bd}{2}$. Предполагается, что площадь выреза в виде прямоугольного треугольника вычисляется достраиванием этого треугольника до прямоугольника. **2.** 6 см.

Вар. 2. **1.** $f^2 + (a + b + c)l - \frac{bd}{2}$. Площадь выреза в виде прямоугольного треугольника вычисляется достраиванием до прямоугольника. **2.** 16 см.

Вар. 3. **2.** 100 см^2.

Вар. 4. **2.** 60 см^2.

Вар. 5. **1.** Достройте каждый из треугольников ADE и BDE до прямоугольника.

2. Проведите прямые, параллельные диагонали ромба и проходящие через его вершины.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. **1.** Пусть в треугольнике ABC BM — медиана. Если $BA = BC$, то решение задачи очевидно. Пусть $AB > BC$. Проведем через точку M прямую $MP \parallel AB$ (рис. 45) и перпендикуляры MT, CE, BP. Тогда $\triangle TBM = \triangle BPM$, $\triangle ATM = \triangle MCE$, $\triangle EKC = \triangle BKP$, откуда получаем, что площади треугольников ABM и BMC равны.

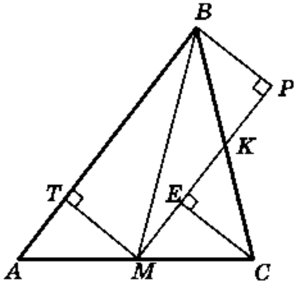

Рис. 45

2. Из треугольника BCD находим $\angle CBD = 45°$. Так как $\angle ABC = 135°$, то $\angle ABD = 90°$. Значит, параллелограмм $ABPK$ является прямоугольником, $\angle ADB = 45°$. Следовательно, $AB = BD$ и $AB : BP = 2 : 3$. Зная периметр прямоугольника $ABPK$, находим, что его площадь равна 54 см^2.

Вар. 8. **1.** Дополнительное построение показано на рисунке 46. Пользуясь полученным чертежом, можно доказать, что площадь треугольника AD_1C равна половине площади прямоугольника $APEC$, а площадь треугольника ABC равна половине площади прямоугольника $ATKC$. Но площади прямоугольников $ATKC$ и $APEC$ относятся как 1 : 2.

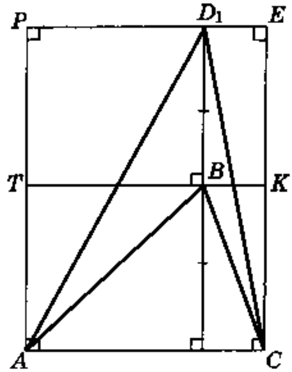

Рис. 46

2. Задача решается аналогично задаче 2 варианта 7. Ответ. 30 см.

С—10

Вар. 1. **1.** 20 см^2. *Вар.* 2. **1.** 77 см^2.

Вар. 3. 1. 45°, 135°. 2. Площадь прямоугольника больше площади параллелограмма.

Вар. 4. 1. 30°, 150°.

2. Площадь квадрата больше площади параллелограмма.

Вар. 5. **1.** Находим, что углы параллелограмма равны 45° и 135°. Отсюда его площадь равна 20 см^2.

2. $S_{AEMH} : S_{BPMK} = AE : BK$, $S_{BPMK} : S_{TMOC} = PB : OC$. Перемножая записанные равенства и учитывая, что $AE = OC$, получаем то, что требуется доказать.

Вар. 6. **1.** $\angle MDB = 2\angle MBD = 15°$. Значит, острый угол ромба равен 30°, а его высота 10 см. Находим, что сторона ромба равна 20 см. Ответ. 200 см^2.

2. $S_{AMOT} : S_{MBHO} = OT : OH = S_{TOPD} : S_{OHCP}$, откуда получаем то, что требуется доказать.

Вар. 7. **1.** Пусть дан треугольник PMK, в котором $\angle P = 90°$, $PM < PK$. Проведем дополнительное построение параллелограмма

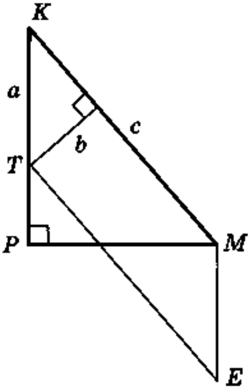

Рис. 47

$KTEM$, как показано на рисунке 47. Тогда площадь этого параллелограмма, с одной стороны, равна bc, а с другой — $MP \cdot a$, откуда получаем, что $PM = \frac{bc}{a}$.

2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади параллелограмма $AMKD$, так как эти параллелограммы имеют общее основание AD и равные высоты. Аналогично равны площади параллелограммов $AMKD$ и $EPKD$. Тогда равны и площади параллелограммов $ABCD$ и $EPKD$. Четырехугольник $EMCD$ общий для этих параллелограммов. Отсюда можно доказать требуемое.

Вар. 8. 1. Пусть дана прямоугольная трапеция $MPKE$, в которой $\angle M = 90°$, $MP = b$, $PK = c$, $KE = a$. Проведем $PT \parallel KE$, $PO \perp KE$, как показано на рисунке 48. Тогда площадь параллелограмма $TPKE$, с одной стороны, равна $PO \cdot a$, а с другой — $b \cdot c$. Значит, $PO = \frac{bc}{a}$. 2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

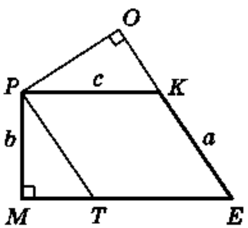

Рис. 48

С—11

Вар. 1. 1. 24 см^2. 2. 8 см^2.

Вар. 2. 1. 25 см^2. 2. 6 см^2.

Вар. 3. 1. 1 : 2. 2. 6 см^2.

Вар. 4. 1. Площади равны. 2. 12 см^2.

Вар. 5. 1. Докажите, что сумма высот этих треугольников, проведенных к противоположным сторонам параллелограмма, равна его высоте. 2. Пусть $MC = x$. Тогда, выражая площадь треугольника ACB различными способами, получаем уравнение $\frac{6x}{2} + \frac{14x}{2} = 42$, откуда находим $x = \frac{21}{5}$ см.

Вар. 6. 1. Задача решается аналогично задаче 1 варианта 5.

2. Площадь треугольника COD равна 16 см^2. Далее можно доказать, что площади треугольников AOB и COD равны.

Вар. 7. 1. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и $\angle AOB = 30°$. Проведем перпендикуляры BK и DE к прямой AC. Тогда площадь четырехугольника равна

$$\frac{BK \cdot AC}{2} + \frac{DE \cdot AC}{2} = \frac{AC}{2}(BK + DE) = \frac{AC}{2}\left(\frac{BO}{2} + \frac{OD}{2}\right) = \frac{AC \cdot BD}{4} = 24\,\text{см}^2.$$

2. $S_{EMH} = \frac{1}{3} S_{EBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{S}{6}$.

Вар. 8. 1. Пусть в треугольнике ABC O — точка пересечения биссектрис. Можно доказать, что точка O удалена от каждой из сторон треугольника на 1,5 см. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1{,}5AB}{2}+\frac{1{,}5BC}{2}+\frac{1{,}5AC}{2}=\frac{1{,}5}{2}(AB+BC+AC)=\frac{1{,}5}{2}\cdot 16=12\text{ см}^2.$$

2. $S_{AMP}:S=(AM\cdot AP):(AB\cdot AC)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}$. Значит, $S_{AMP}=\frac{2}{9}$. Аналогично $S_{PKC}=\frac{2}{9}S$, откуда искомая площадь равна $\frac{5}{9}S$.

С—12

Вар. 1. 1. 4 см. 2. 54 см^2. *Вар.* 3. 1. 13,5 см^2. 2. 54 см^2.
Вар. 2. 1. 5 см. 2. 72 см^2. *Вар.* 4. 1. 24 см^2. 2. 18 см^2.

Вар. 5. 1. Из точки O опустим перпендикуляры OP, OK, OM на стороны AD, CD, BC соответственно. Можно доказать, что $OP=OK=OM$. Из треугольника OKD находим $OK=\frac{a}{2}$. Тогда площадь трапеции будет равна $\frac{a}{2}(b+c)$.

2. Можно доказать, что площади треугольников MPH и PHK равны. Тогда площадь трапеции равна S_1+S_2.

Вар. 6. 1. $AM=AH$, так как $AB\perp MH$ и $MB=BH$; $HA\perp MK$, так как $MH=HK$ и $AM=AK$. Значит, отрезок HA является высотой трапеции и равен $\frac{a}{2}$. Площадь трапеции равна $\frac{a(a+b)}{4}$.

2. Проведем диагональ AC трапеции $ABCD$. Тогда $S_{ABC}=S_1$, $S_{ACD}=S_2$. Площадь трапеции равна S_1+S_2.

Вар. 7. 1. Можно доказать, что точка O равноудалена от всех вершин трапеции. Тогда из задачи 1 варианта 8 С—4 следует, что $\angle A=30°$. Площадь трапеции будет равна $\frac{a(b+c)}{4}$.

2. Проведем через точку O прямую, параллельную MK, пересекающую отрезки MH и PK в точках E и T соответственно. Можно доказать, что $AE\parallel PK$, $BT\parallel MH$. Таким образом, трапеция разбивается на 8 треугольников, равных треугольнику HOP. Следовательно, площадь трапеции равна 40 см^2.

Вар. 8. 1. Можно доказать, что точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Тогда из задачи 2 варианта 7 С—4 вытекает, что $PK+MH=b+c$. Площадь трапеции будет равна $\frac{a(b+c)}{2}$.

2. Можно доказать, что площади треугольников AOB и COD равны. Тогда $S_{AOB}:S_{BOC}=S_{AOD}:S_{DOC}$, откуда получаем $S^2_{AOB}=S^2_{COD}=S_{AOD}\cdot S_{BOC}=100$. Ответ. 45 см^2.

С—13

Вар. 1. 1. 50 см^2. 2. 90°, 60°, 30°.
Вар. 2. 1. 162 см^2. 2. 90°, 45°, 45°.
Вар. 3. 1. 216 см^2. 2. 105°.
Вар. 4. 1. 99 см^2. 2. 75°.
Вар. 5. 1. Высота трапеции равна $\sqrt{26^2-24^2}=10$ см. Так как диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то полусумма ее оснований равна высоте (см. задачу 1 из варианта 6 С—4). Значит, площадь трапеции равна 100 см^2.

2. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = 9$ см, $BC = 15$ см, $DC = 12$ см, $AD = 30$ см. Проведем прямую $BE \parallel CD$ ($E \in AD$). Тогда можно доказать, что $EB = CD = 12$ см, $ED = BC$, $AE = 15$ см. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что $\angle ABE = 90°$. Значит, искомый угол прямой.

Вар. 6. **1.** Задача решается с использованием задачи 1 варианта 5 **С—4**. Площадь трапеции равна 300 см^2.

2. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD = 10$ см, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см, $BD = 12$ см. Через вершину C проведем прямую, пересекающую луч AD в точке E и параллельную BD. Тогда можно доказать, что $CE = BD$, $DE = BC$. По теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что $\angle ACE = 90°$. Значит, искомый угол также прямой.

Вар. 7. **1.** $BC^2 - CH^2 = AB^2 - AH^2$, $BC^2 = CH^2 + AB^2 - AH^2 = AC - AH^2 + AB^2 - AH^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AH$.

2. Пусть в треугольнике MEP бо́льшая сторона равна c, $ME = a$, $EP = b$. Докажите методом от противного, что треугольник MEP тупоугольный. В самом деле, треугольник MEP не может быть прямоугольным, так как это противоречило бы обратной теореме Пифагора. Если предположить, что треугольник MEP остроугольный, то по утверждению задачи 1 данного варианта $MP^2 < ME^2 + EP^2$, что противоречит тому, что $c^2 > a^2 + b^2$. Значит, треугольник MEP тупоугольный.

Вар. 8. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 7.

С—14

Вар. 1. **1.** 9,5 см^2. **2.** 114 см^2.

Вар. 2. **1.** 6 см^2. **2.** 126 см^2.

Вар. 3. **1.** Следует доказать, что треугольники DEC, ABE, APE прямоугольные. Площадь многоугольника равна 42 см^2. **2.** $5\sqrt{10}$ см^2.

Вар. 4. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 3. Ответ. 42 см^2. **2.** 4,8 см.

Вар. 5. **1.** Третий угол треугольника равен 30°. Пусть меньшая высота равна x. Можно доказать, что бо́льшая сторона равна $x(\sqrt{3} + 1)$. Составляем уравнение $\frac{x^2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$, откуда $x = \sqrt{2}$.

2. Следует доказать, что острый угол ромба равен 60°. Ответ. $2\sqrt{3}$ см^2.

Вар. 6. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5. Ответ. $\frac{10}{1+\sqrt{3}}$.

2. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ с площадью, равной 78 см^2. BE и BK — высоты, проведенные к сторонам AD и BC соответственно, $BE = 6$ см, $BK = 7,8$ см. Используя формулу площади параллелограмма, находим $AD = 13$ см, $CD = 10$ см. Из тре-

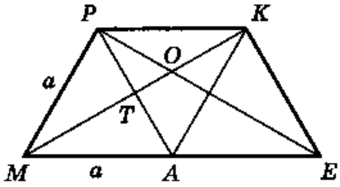

Рис. 49

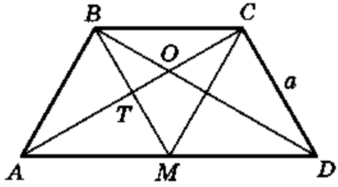

Рис. 50

угольника ABE $AE = 8$ см, тогда $ED = 5$ см, и из треугольника BED получаем $BD = \sqrt{61}$ см.

Вар. 7. 1. На рисунке 49 изображена трапеция $MPKE$, о которой говорится в условии задачи. Так как O — точка пересечения медиан треугольника APK, то $PT = AT$ и $\triangle MTA = \triangle PTK$. Следовательно, $PK = a$. Далее площадь равнобедренной трапеции $MPKE$ легко найти. Ответ. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$, M и K — середины сторон AC и BC соответственно, $BM = MK = 12$ см. Проведем $KP \perp BM$, $KE \perp AC$, $P \in BM$, $E \in MC$. Тогда P — середина BM, т. е. $BK = KM$. Следовательно, $\angle MBK = 60°$. Площадь треугольника ABC равна $114\sqrt{3}$ см^2.

Вар. 8. 1. На рисунке 50 изображена трапеция, о которой говорится в условии задачи. Так как O — точка пересечения высот треугольника BMC, то $AC \perp BM$. Значит, $AT = TC$. Далее, $\triangle ATM = \triangle BTC$. Следовательно, $AM = a = MD$. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ будет равна $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 15°$, $AD = 12$ см. Отметим на диагонали BD точку K так, что $\angle BAK = 60°$. Тогда $\angle AKB = 30°$, $\angle KAD = 15°$. Пусть $BA = x$. Получим $AK = KD = 2x$, $BK = x\sqrt{3}$, $BD = x(\sqrt{3} + 2)$, $AD^2 = AB^2 + BD^2$. Тогда $x^2 + x^2(\sqrt{3} + 2)^2 = 144$, откуда $x^2 = \frac{36}{2 + \sqrt{3}}$. Площадь параллелограмма равна $AB \cdot BD = x^2(\sqrt{3} + 2)$, или 36 см^2.

С—15

Вар. 1. 1. 6,25 см. 2. 10 см, $4\frac{2}{7}$ см, $5\frac{5}{7}$ см.

Вар. 2. 1. 5 дм. 2. 12 см, $6\frac{2}{3}$ см, $5\frac{1}{3}$ см.

Вар. 3. 1. 60 см. 2. 62,4 см.

Вар. 4. 1. 30 см. 2. 90 мм.

Вар. 5. 2. 84 мм. Докажите, что CE — биссектриса угла C.

Вар. 6. 2. 36 дм. Докажите, что BP — биссектриса угла B.

Вар. 7. **1.** Пусть BD_1 — биссектриса угла ABC. Тогда $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$. По условию $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$. Отсюда $\frac{AD}{DC} > \frac{AD_1}{D_1C}$, $\frac{AD}{DC} + 1 > \frac{AD_1}{D_1C} + 1$, $\frac{AC}{DC} > \frac{AC}{D_1C}$. Тогда $DC < D_1C$ и $\angle ABD > \angle DBC$.

2. 16 см. Продолжим сторону BC за точку B на отрезок BD, равный AB. Пусть биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает продолжение стороны AC в точке E. Легко доказать, что $AE = DE$ и что EB — биссектриса угла DEC. Тогда $\frac{BC}{DB} = \frac{EA + AC}{DE}$. Отсюда можно получить $AE = 16$ см.

Вар. 8. **1.** Если предположить, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, то тогда можно доказать, что BD — биссектриса угла ABC. Если же $\frac{AD}{DC} < \frac{AB}{BC}$, то $\angle ABD < \angle DBC$ (см. задачу 1 из варианта 7 **С—15**). В том и другом случае мы получаем результат, который противоречит условию. Поэтому $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.

2. $87\frac{3}{11}$ см (см. задачу 2 из варианта 7 **С—15**).

С—16

Вар. 1. **1.** 30. **2.** 2,5 см.
Вар. 2. **1.** $\angle T = 20°$, $\angle K = 40°$, $\angle P = \angle M = 120°$. **2.** 50 см^2.
Вар. 3. **1.** 15. **2.** 80 см^2, 180 см^2.
Вар. 4. **1.** $5\frac{5}{7}$ см. **2.** 65 дм, 52 дм.
Вар. 5. **1.** 6 см. **2.** 24 см^2.
Вар. 6. **1.** 46 см. **2.** 32 см^2.
Вар. 7. 30°, 60°, 90°. Нужно исключить случаи: 1. $\angle ABC \neq 90°$ и $BK \perp AC$. 2. $\angle BKC$ тупой (или острый). 3. $BK \perp AC$ и $\angle ABK = \angle KBC$. Во всех этих случаях треугольники ABK и KBC не могут быть подобны. Остается единственно возможный вариант, когда $\angle ABC = 90°$ и $BK \perp AC$. Так как $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{3}$. Из подобия треугольников ABK и KBC следует, что $\frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KC}$. Так как $AK = \frac{KC}{3}$, то $KC = BK\sqrt{3}$. Из треугольника KBC следует, что $BC^2 = BK^2 + 3BK^2$, т. е. $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$. Отсюда $\angle BCK = 30°$.

Вар. 8. 40 см^2 (см. **С—16**, вар. 7).

С—17

Вар. 1. **2.** $AB = 2{,}2$, $BC = 1{,}4$, $A_1C_1 = 4{,}4$.
Вар. 2. **2.** $BC = 4{,}8$, $DF = 1{,}6$, $DE = 1{,}1$.

Вар. 3. **2.** 1,2 см, 3,6 см.

Вар. 4. **2.** 8 см, 12 см.

Вар. 5. **2.** Необходимо продолжить AK до пересечения с продолжением BC в точке E и доказать, что $ABED$ — параллелограмм.

Вар. 6. **2.** Необходимо продолжить AM до пересечения с продолжением BC в точке E и доказать, что $ABED$ — ромб.

Вар. 7. **1.** Продолжим отрезок AC за точку A на отрезок AD, равный AB. Очевидно, что $\angle BDC = \angle ABC$. Тогда $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ и $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$; $BC^2 = CD \cdot AC$, $a^2 = (b + c)\,b$, т. е. $a^2 = bc + b^2$.

2. 48. $S_{ADE} = S_{CDE}$. Отсюда следует, что $DE \parallel AC$. Так как $S_{ADO} = 8$, а $S_{DOE} = 4$, то $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{1}$, $\triangle DOE \sim \triangle AOC$. Коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$. Тогда $S_{AOC} = 16$ и $S_{ADEC} = 36$; $DE = \frac{1}{2}AC$ и $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Тогда $S_{ADEC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$. Отсюда $S_{ABC} = 48$.

Вар. 8. **1.** Через вершину A проведем прямую, параллельную BC и пересекающую продолжение CE в точке F; $\triangle AEF \sim \triangle CEB$. Отсюда $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{EF}{CE} = \frac{1}{2}$, так как по условию $AE : EB = 1 : 2$; $AF = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника CAF следует, что $CF = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$; $CE = \frac{2}{3}CF = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$.

2. 24 (см. задачу 2 из варианта 7 С—17).

С—18

Вар. 1. **2.** Прямые AB и DE параллельны.

Вар. 2. **2.** Прямые BC и DF параллельны.

Вар. 5. **1.** Необходимо доказать подобие треугольников ABC и ACD.

2. Так как $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$, то $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$. Отсюда $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). Так как $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, то $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$. Отсюда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Кроме того, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, а поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Вар. 6. **1.** Необходимо доказать подобие треугольников BDC и ABC.

2. Так как $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$ и $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$, то $\triangle AOD \sim \triangle A_1O_1D_1$. Отсюда $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, и так как O и O_1 — середины AC и A_1C_1, то $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (1). Так как $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$ и

$\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$, то $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Легко доказать, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Отсюда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Вар. 7. 2. Продолжим сторону AC за точку A на отрезок AD, равный AB. По условию $a^2 = b(c + b)$, т. е. $BC^2 = AC \cdot DC$, или $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$; $\angle BCA$ у треугольников ABC и DBC общий, а потому $\triangle ABC \sim \triangle DBC$. Отсюда легко доказать, что $\angle A = 2\angle B$.

Вар. 8. 1. $\triangle ADB \sim \triangle BEC$. Из этого следует, что $\frac{AD}{BC} = \frac{DB}{BE}$. Но $AB = BC$, поэтому $\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BE}$. Легко доказать, что $\angle DBE = \angle DAB$. Тогда $\triangle ADB \sim \triangle BDE$ и $\angle BDE = \angle ADB$.

2. 0,5. Необходимо доказать, что треугольники AMP и KCT подобны. Отсюда следует, что $KT \parallel MP$ и $MKTP$ — трапеция. Из подобия треугольников MEP и KET имеем $ME : ET = 1 : 2$.

С—19

Вар. 1. 1. 28 см, $\angle KOA = \angle BCA$. 2. 8 см.
Вар. 2. 2. 27 см.
Вар. 3. 2. 36.
Вар. 4. 2. 108.
Вар. 5. 2. 60 см^2.
Вар. 6. 2. 0,8 см.

Вар. 7. 1. Соединим отрезком прямой точки E и M. Пусть M_1 — середина CE. Тогда MM_1 — медиана треугольника EMC. Так как $MM_1 \parallel AE$, то $MM_1 \perp CE$. В таком случае треугольник EMC равнобедренный и $\angle EMM_1 = \angle M_1MC$. Обозначим точку пересечения MM_1 со стороной BC буквой F. Тогда $MFCD$ — ромб и $\angle M_1MC = \angle CMD$. Кроме того, $\angle AEM = \angle EMM_1$. Отсюда следует, что $\angle EMD = 3\angle AEM$. 2. 72.

Вар. 8. 1. Пусть AE пересекает прямую BC в точке P, а DF — в точке T. Треугольник PBA равнобедренный ($PB = BA$) и $BE \perp AE$. Отсюда E — середина AP. Аналогично F — середина DT. Легко доказать, что $EF \parallel PT$. Пусть EF пересекает AB в точке M, а CD — в точке N. Имеем $EM = NF = \frac{a}{2}$, $MN = BC = a$. Поэтому $EF = 2a$. 2. 12 см.

С—20

Вар. 1. 1. $\frac{1}{4}$. 2. 90 см^2.
Вар. 2. 1. $\frac{4}{9}$. 2. 54 см^2.
Вар. 3. 1. 200 см^2. 2. $4\frac{2}{13}$.
Вар. 4. 1. 156 см^2. 2. $4\sqrt{13} + 8$.

Вар. 5. 1. 30°, 60°. 2. 75 см². Нужно учесть, что $\frac{S_{ABE}}{S_{BED}} = \frac{9}{16}$ и $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2}$.

Вар. 6. 1. 60°, 120°, 90°, 90°. 2. $64\sqrt{3}$ см².

Вар. 7. 1. 150 см². Через вершину C провести прямую, параллельную BD, до пересечения с продолжением AD в точке M и рассмотреть прямоугольный треугольник ACM.

2. 30°. Необходимо доказать, что ABM — прямоугольный треугольник.

Вар. 8. 1. $10\sqrt{6}$ см (см. указания к задаче 1 варианта 7 С—20).

2. 60°, 120°, 60°, 120°.

С—21

Вар. 5. 2. Найти точку M пересечения прямых A_1A и B_1B. Прямые MC и MD пересекают прямую n соответственно в точках C_1 и D_1. Легко доказать, что отрезок C_1D_1 искомый.

Вар. 6. Найти точку M пересечения прямых A_1D и B_1C. Прямые AM и BM пересекают прямую b соответственно в точках D_1 и C_1. Легко доказать, что отрезок C_1D_1 искомый.

Вар. 7. 1. Отрезок, равный периметру, разделить в отношении $2 : 3 : \sqrt{13}$ и построить треугольник по трем сторонам.

Вар. 8. 1. Отрезок, равный периметру, разделить в отношении $4 : \sqrt{5} : \sqrt{5}$ и построить треугольник по трем сторонам.

С—22

Вар. 1. 1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$. 2. 60°.

Вар. 2. 1. $\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{6}}{2}$. 2. 60°.

Вар. 3. 1. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$. 2. 30°, 60°.

Вар. 4. 1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$. 2. 45°, 135°.

Вар. 5. 1. 60°, 30°, 90°. 2. $\frac{24}{5}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$.

Вар. 6. 1. 60°, 30°, 90°. 2. $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$.

Вар. 7. 1. Пусть α — искомый угол. По условию $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Поэтому необходимо построить прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), у которого $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{1}$. Тогда $\angle A$ будет искомым.

2. $0{,}25(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABD ($\angle ADB = 90°$) и прямоугольный треугольник

BDC ($\angle BDC = 90°$) с углом DBC, равным 30°. Точки A, D, C лежат на одной прямой ($A—D—C$). Очевидно, что $\angle ABC = 75°$. Пусть $AD = BD = 1$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$ (1). С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 75° = \frac{\sqrt{6}}{3}\sin 75°$ (2). Из равенств (1) и (2) следует ответ $0{,}25\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

Вар. 8. 1. См. решение задачи 1 из варианта 7 С—22.

2. $0{,}25\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) с углом A, равным 30°. Пусть AD — биссектриса треугольника; $\angle DAC = 15°$. Пусть $BC = 1$, тогда $AB = 2$ и $AC = \sqrt{3}$. Используя свойства биссектрисы треугольника, можно доказать, что $CD = 2\sqrt{3} - 3$. Из треугольника ACD имеем

$$AD = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \sin 15° = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

С—23

Вар. 1. 1. $S = ab \sin \alpha$; 5,54. 2. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Вар. 2. 1. $S = \frac{h^2}{\sin \alpha}$; 376,16. 2. $3\sqrt{6}$.

Вар. 3. 1. $S = \frac{d^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 123,85. 2. 82°23′, 7°37′.

Вар. 4. 1. $S = 3\alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha$; 82,07. 2. 63°41′.

Вар. 5. 1. $h = \sqrt{2S \sin \alpha \cos \alpha}$; 6,44. 2. 27°5′.

Вар. 6. 1. $h = \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha}$; 10,16. 2. 28°13′.

Вар. 7. 1. $\frac{d \sin \alpha}{\sin \beta}$; 11,36. 2. 47°8′.

Вар. 8. 1. $6a^2 \sin \alpha \cos \alpha$; 886,24. Через вершину B проведем прямую, параллельную CD, до пересечения с AD в точке F. Треугольник ABF прямоугольный, так как $\angle ABF = 90°$. Исходя из условия, E — середина AF, а потому $AF = 2a$; $AB = 2a \cos \alpha$. Высота трапеции $h = AB \sin \alpha = = 2a \cos \alpha \sin \alpha$. Тогда площадь трапеции $S = 6a^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

2. $\frac{\sqrt{1 - m^2}}{1 + m}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом C при вершине, равным α, причем $\cos \alpha = m$, $BE \perp AC$. Обозначим $\angle EBA = x$. Пусть $BE = h$. Из треугольника CEB имеем

$BC = AC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$; $CE = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$. Из треугольника AEB $AE = h \operatorname{tg} x$. $AC = CE + EA$; $\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + h \operatorname{tg} x$. Отсюда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}.$$

С—24*

Вар. 1. 1. $\dfrac{288}{49}$. 2. $\dfrac{4}{3}$.

Вар. 2. 1. $\dfrac{121}{4}$. 2. $\dfrac{4}{3}$.

Вар. 3. 1. $14\dfrac{34}{121}$. 2. $\dfrac{4}{5}$.

Вар. 4. 1. $47\dfrac{1}{49}$ см^2. 2. $\dfrac{15}{17}$.

Вар. 5. 1. $24(7-4\sqrt{3})$. 2. Из прямоугольного треугольника AOB следует, что $FB = \dfrac{BO^2}{AB}$ (1). Из прямоугольного треугольника BOC следует, что $BD = \dfrac{BO^2}{BC}$ (2). Из равенств (1) и (2) имеем $\dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{AB}$. Кроме того, в треугольниках DFB и ACB угол ABC общий. Отсюда следует, что $\triangle ABC \sim \triangle DFB$, а потому $\angle ACB = \angle DFB$.

Вар. 6. 1. $6a^2(2-\sqrt{3})^2$. 2. Из прямоугольного треугольника ADB имеем $EB = \dfrac{BD^2}{AB}$ (1). Из прямоугольного треугольника BDC имеем $FB = \dfrac{BD^2}{BC}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\dfrac{EB}{FB} = \dfrac{BC}{BA}$. В треугольниках EBF и ABC угол ABC общий. Отсюда следует, что $\triangle EBF \sim \triangle ABC$.

Вар. 7. 1. $\dfrac{ab^2\sqrt{3}}{4(b-2a)}$. 2. Через точку M проведем прямую, параллельную AC и пересекающую стороны AB и BC соответственно в точках K и L. Так как BD — медиана, то легко доказать, что $KM = ML$. Из подобия треугольников KFM и AFC следует, что $\dfrac{FM}{FC} = \dfrac{KM}{AC}$. Из подобия треугольников MEL и AEC следует, что $\dfrac{EM}{AE} = \dfrac{ML}{AC}$, но $KM = ML$. Поэтому $\dfrac{FM}{FC} = \dfrac{EM}{AE}$, т. е. $\dfrac{FM}{MC} = \dfrac{EM}{MA}$. Тогда, так как $\angle FME = \angle AMC$, $\triangle FME \sim \triangle AMC$. Отсюда $\angle EFM = \angle MCA$. Поэтому $EF \parallel AC$.

Вар. 8. 1. $\dfrac{3ah^2}{2(2h-a\sqrt{3})}$. 2. $\dfrac{ab}{m}$. Пусть в треугольнике ABC высоты BD и AE пересекаются в точке O; $\triangle BDC \sim \triangle AEC$. Отсюда $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{DC}{EC}$ (1); $\triangle AEC \sim \triangle AOD$. Отсюда $\dfrac{EC}{OD} = \dfrac{AE}{AD}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $BD = \dfrac{AD \cdot DC}{OD} = \dfrac{ab}{m}$.

С—25

Вар. 1. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 12 см.

Вар. 2. 1. а) $R = 5$; б) $R < 5$; в) $R > 5$. 2. 17.

Вар. 3. 1. Прямая DE является касательной к окружности. 2. 35 см.

Вар. 4. 1. Окружность касается прямой AB. 2. 13,44.

Вар. 5. 1. Прямая BD касается этой окружности. 2. $2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

Вар. 6. 1. Прямая AB касается этой окружности. 2. $\dfrac{m}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Вар. 7. 2. Пусть O — центр окружности. Необходимо доказать, что треугольник COD прямоугольный. Радиус окружности OK, проведенный в точку касания CD с окружностью, является высотой треугольника COD. Поэтому $OK^2 = CK \cdot KD$, но $AC = CK$ и $DB = KD$, а потому $OK^2 = AC \cdot DB$.

Вар. 8. 2. $\dfrac{3r\sqrt{3}}{2}$.

С—26

Вар. 1. 1. $3\sqrt{3}$ см. 2. 100°.

Вар. 2. 1. 30°. 2. 20°.

Вар. 3. 1. 10 см. 2. 6 см.

Вар. 4. 1. 3. 2. 288.

Вар. 5. 2. 5 см.

Вар. 6. 2. 220°, 80°, 60°.

Вар. 7. 1. Пусть угол ABC вписан в окружность и BD — его биссектриса (D лежит на окружности). Хорда DE параллельна AB. Нужно доказать, что $DE = BC$. Так как $DE \parallel AB$ и BD — биссектриса угла ABC, то $\angle ABD = \angle BDE = \angle DBC$; $\angle DCB = \angle DEB$ как вписанный, опирающийся на одну и ту же дугу; $\triangle DCB = \triangle DEB$ по стороне и двум углам. Отсюда $DE = BC$.

2. $\angle 1$ измеряется половиной дуги KA (рис. 51), $\smile KA = \smile KF + \smile FA = \smile KF + 90°$; $\angle 2$ измеряется полусуммой дуг KF и EA, но $\smile EA = 90°$. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$. Поэтому треугольник KNM равнобедренный и $NK = NM$.

Вар. 8. 1. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 52); угол 3 измеряется половиной дуги BED; угол 4 измеряется половиной этой

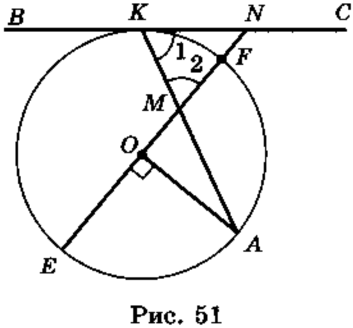

Рис. 51

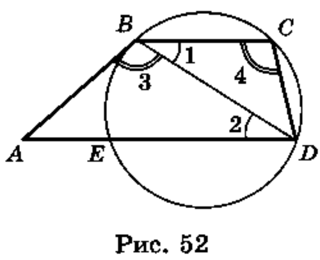

Рис. 52

же дуги, поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ по двум углам. Дальнейшее решение очевидно.

2. 16 см. Необходимо доказать, что $\triangle AED$ прямоугольный.

С—27

Вар. 1. 1. 16 см. 2. $\sqrt{15}$.

Вар. 2. 1. 20. 2. 6,5.

Вар. 3. 1. 5.

Вар. 4. 1. $4\sqrt{5}$.

Вар. 5. 1. 8 см. Докажите, что точка E — середина хорды BC.

Вар. 6. 1. 10 см.

Вар. 7. 1. $\frac{1}{3}$. Имеем $BC = 2r$, $AB = r$, $CD = \frac{3}{4}\cdot 2r = \frac{3}{2}r$. Необходимо учесть, что $O_1P \cdot O_1Q = O_1A \cdot O_1D$. Так как $O_1Q = 2R - r$, $O_1P = r$, $O_1A = r + r = 2r$, $O_1D = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$, то $(2R - r)\cdot r = 5r^2$. Отсюда $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

2. Воспользуйтесь теоремой о касательной и секущей.

Вар. 8. 1. 12; 1. 2. Необходимо построить окружность, проходящую через точки B и C и касающуюся AB в точке B. Эта окружность пересечет сторону AC в искомой точке D.

С—28*

Вар. 1. 1. $2\sqrt{R^2 - r^2}$.

Вар. 2. 1. $2r\sqrt{2}$.

Вар. 3. 1. 8 см.

Вар. 4. 1. 20.

Вар. 5. 1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Пусть O и O_1 — центры соответственно большей и меньшей окружностей. Необходимо доказать, что $\angle AOC = 60°$, а $\angle BO_1C = 120°$. Кроме того, треугольник ACB прямоугольный.

2. Проведем диаметр AD; треугольник CDA прямоугольный; $\angle CDA = \angle CBA$ как опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Из этого вытекает, что $\angle OAC = \angle BAH$.

Вар. 6. 1. $\sqrt{63}$. Пусть O и O_1 — центры соответственно большей и меньшей окружностей; $OO_1 = 3$. Через точку O проведем прямую, параллельную AB. Обозначим точку касания AB с меньшей окружностью через K; O_1K пересекает проведенную прямую в точке P. Из треугольника OO_1P следует, что $PO_1 = \frac{3}{2}$, так как по условию $\angle POO_1 = 30°$; $OM \perp AB$, $OM = PK = PO_1 - KO_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Из треугольника AOM следует, что $AM = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2}$, $AB = \sqrt{63}$.

2. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ABD$.

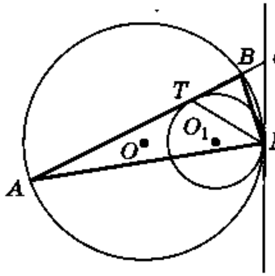

Рис. 53

Вар. 7. 1. $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$. 2. Пусть стороны AC и BD пересекаются в точке O; $\angle DAC = \angle BAC$ по условию, а $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\triangle ADC \sim \triangle COD$ по двум углам ($\angle DCA$ общий). Отсюда следует, что $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CD}$ и $AD \cdot BC = AC \cdot DO$ (1). Аналогично можно доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BOC$. Тогда $AB \cdot BC = AC \cdot BO$ (2). Складывая почленно равенства (1) и (2), получим $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

Вар. 8. 1. $0{,}2a$. 2. Проведем общую касательную двух окружностей, и пусть AB пересекает эту касательную в точке C (рис. 53). Так как $CT = CM$ как отрезки касательных, проведенных из точки C к меньшей окружности, то $\angle CMT = \angle CTM$. Кроме того, $\angle CAM = \angle BMC$, $\angle AMT = \angle CTM - \angle CAM = \angle CTM - \angle BMC = \angle CMT - \angle BMC = \angle BMT$. Значит, MT — биссектриса $\angle AMB$.

С—29

Вар. 1. 2. 35.

Вар. 2. 1. 12. 2. 45.

Вар. 3. 1. $m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. 2. 2,4.

Вар. 4. 1. 6.

Вар. 5. 1. $\frac{a}{2}$. 2. 30°.

Вар. 6. 1. 25. 2. $90° + \alpha$.

Вар. 7. 1. Строим вспомогательный прямоугольный треугольник с некоторым катетом, равным a, и построением находим отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан. Пусть этот отрезок имеет длину, равную b. Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Обозначим сторону искомого треугольника через x. Тогда $\frac{a}{x} = \frac{b}{m}$. Построением находим отрезок x. Дальнейшее построение очевидно. 2. $\frac{11}{12}$.

Вар. 8. 1. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. 2. $\frac{1}{6}$.

С—30

Вар. 1. 1. 1 см. 2. 2,5 см.

Вар. 2. 1. 6 см. 2. 16 см.

Вар. 3. 1. 3 см. 2. 9,6 см.

Вар. 4. 1. 2 см. 2. 2 см.

Вар. 5. 1. $6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2$. 2. 94,08 см^2. Если обозначить центр вписанной окружности через O, то нужно доказать, что треугольник AOB прямоугольный. Высота этого треугольника равна радиусу вписанной в трапецию окружности. Высота трапеции равна диаметру этой окружности. Кроме того, $AD + BC = AB + CD$.

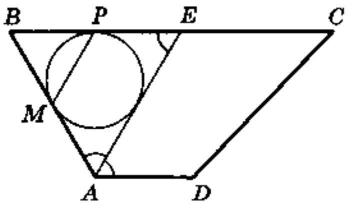

Рис. 54

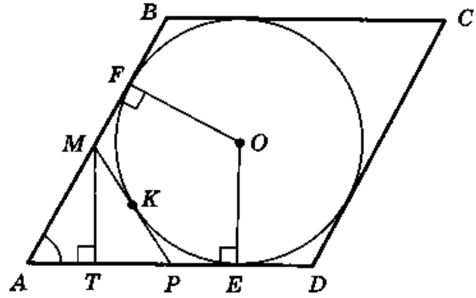

Рис. 55

Вар. 6. 1. 3 см. 2. 18.

Вар. 7. 1. $3(3-\sqrt{5})$. 2. 120°. Очевидно, что $AB = BE$ и $BM = BP$ (рис. 54). Отсюда $\frac{AB}{BM} = \frac{BE}{BP}$. Тогда $\triangle MBP \sim \triangle ABE$. Из подобия треугольников следует, что треугольник BMP равнобедренный и $\angle BMP = \angle BPM$; так как по условию $BM = MP$, а $\angle BPM = \angle MPB$, то треугольник MPB равносторонний, а потому и подобный ему треугольник ABE равносторонний и $\angle BAE = 60°$, т. е. $\angle BAD = 120°$.

Вар. 8. 1. $3-\sqrt{5}$ см. 2. $MB = PD = 2$ см. Очевидно, что радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$ см и $AE = AF = 3$ см (рис. 55). Исходя из свойств касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AP + PK = AE$ и $AM + MK = AF$. Складывая эти равенства, получим, что $P_{AMP} = 6$ см, а так как $MP = 2$ см, то $AP + AM = 4$ см. Пусть MT — высота треугольника AMP. Обозначим AM через x. Тогда $MT = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $AT = \frac{x}{2}$,$PT = 4-\frac{3x}{2}$. Из треугольника MTP следует, что $\frac{3x^2}{4} + 16 - 12x + \frac{9x^2}{4} = 4$. Отсюда $x = 2$. Итак, $AM = AP = 2$ см. Тогда и $MB = PD = 2$ см.

С—31

Вар. 1. 1. 27. 2. 96.

Вар. 2. 1. 13 см. 2. 36 см.

Вар. 3. 1. 6,25 см. 2. 40°, 50°, 50°.

Вар. 4. 1. $4\sqrt{13}$ см. 2. 0,5 см.

Вар. 5. 2. 5 дм.

Вар. 6. 1. *а*. 2. $12\sqrt{3}$ см. Необходимо доказать, что AD — диаметр описанной окружности.

Вар. 7. 1. На рисунке 56 точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке пересечения высот H относительно сторон BC, AC, AB. Очевидно,

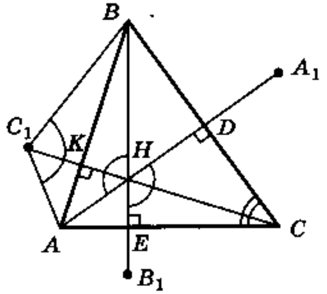

Рис. 56

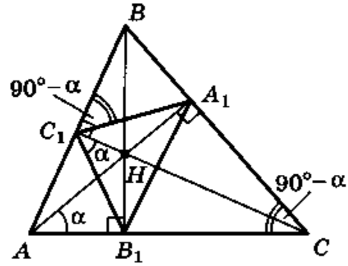

Рис. 57

что $\triangle\ AC_1B = \triangle\ AHB$. Отсюда $\angle AC_1B = \angle AHB$, но $\angle DHE = \angle AHB$. В четырехугольнике $EHDC$ углы HEC и HDC прямые, а потому $\angle DHE + \angle BCA = 180°$. Следовательно, $\angle AC_1B + \angle BCA = 180°$. Это значит, что точка C_1 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Аналогичные рассуждения можно провести относительно точек A_1 и B_1. 2. $\frac{bR_1}{a}$.

Вар. 8. 1. На рисунке 57 H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1. Около четырехугольника AC_1HB_1 можно описать окружность; $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Обозначим эти углы через α; $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$, $\angle BC_1A_1 = \angle BCA = 90° - \alpha$. Тогда $\angle A_1C_1H = 90° - 90° + \alpha = \alpha$. Следовательно, $\angle A_1C_1H = \angle HC_1B_1$, т. е. C_1C — биссектриса $\angle A_1C_1B_1$. Аналогично можно доказать, что A_1A — биссектриса $\angle C_1A_1B_1$, а BB_1 — биссектриса $\angle C_1B_1A_1$. 2. $\frac{cR}{b}$.

С—32

Вар. 1. 1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$. 2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{f}$ и $\vec{e}$. 3. $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. 4. $\vec{f}$ и $\vec{e}$; нельзя.

Вар. 2. 1. $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 2. $\vec{c}$ и $\vec{d}$. 3. $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 4. $\vec{a}$ и $\vec{b}$; да, можно.

Вар. 3. 2. а) $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{a}$ и $\vec{d}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{c}$ и $\vec{a}$; в) $\vec{d}$ и $\vec{a}$, $\vec{d}$ и $\vec{c}$; г) $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вар. 4. 2. а) $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{m}$ и $\vec{n}$; в) $\vec{m}$ и $\vec{c}$, $\vec{n}$ и $\vec{c}$; г) $\vec{d}$ и $\vec{c}$.

Вар. 5. 1. а) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{DF}$; б) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{DF}$; г) $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$; д) $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{DF}$. 2. 90°.

Вар. 6. 1. а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{BE}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CE}$. 2. 20 см.

Вар. 7. **1.** 21. Необходимо учесть $\vec{0}$.

Вар. 8. **1.** 21. Необходимо учесть $\vec{0}$.

С—33

Вар. 1. **2.** $\vec{0}$. *Вар.* 5. **2.** $\overrightarrow{ED}$. *Вар.* 6. **2.** $\overrightarrow{EF}$.

Вар. 8. $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{A_1B}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$.

С—34

Вар. 1. **2.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. **3.** 6 см.

Вар. 2. **2.** $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$. **3.** 5.

Вар. 3. **2.** $-\vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{c}$. **3.** 6,5.

Вар. 4. **2.** $\vec{a} - \vec{d}$, $\vec{d} - \vec{a}$, $\vec{a}$. **3.** 16.

Вар. 5. **1.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD}$. **2.** $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. **3.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Вар. 6. **1.** $-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$. **3.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Вар. 7. **1.** $\frac{4m}{3}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA}$. Построение показано на рисунке 58.

Вар. 8. **1.** $\frac{4m}{3}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OC}$. От точки O откладываем вектор $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BA}$ (рис. 59). Тогда $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CE}$. Продолжим AA_1, как показано на рисунке, на отрезок A_1P, равный OA_1. Тогда $OBPC$ — параллелограмм и $PC \parallel OB \parallel AE$, $PC = OB = AE$. Отсюда следует, что $EAPC$ — параллелограмм и $|\overrightarrow{CE}| = \frac{4m}{3}$.

2. $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OB} - (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Отсюда следует, что $A_1B_1 = BA$ и $A_1B_1 \parallel BA$. Дальнейшее очевидно.

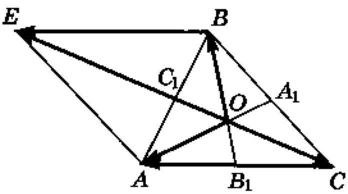

Рис. 58

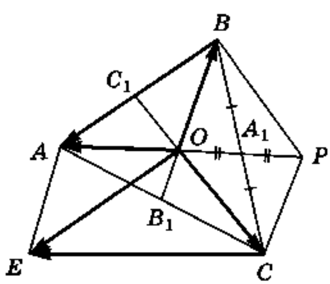

Рис. 59

С—35

Вар. 1. **2.** $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Вар. 2. **2.** $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{m} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

Вар. 3. **2.** $\vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}$, $\frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}$.

Вар. 4. **2.** $\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{a}$, $\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{p}$.

Вар. 5. **2.** $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{p}$.

Вар. 6. **2.** $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{p}$.

Вар. 7. **1.** $\vec{0}$; $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$.

2. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 60), $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{CD} = k\vec{c}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = -\vec{a} + k\vec{c} + (\vec{a} + \vec{c}) = (k+1)\vec{c}$. Это значит, что $BE \parallel AF$.

Вар. 8. **1.** $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} - (k-1)\overrightarrow{AB}$. Аналогично можно получить, что $\overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{AD} - (k-1)\overrightarrow{DC}$. Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{MF}$, а потому $PEFM$ — параллелограмм.

2. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 61); $OK \perp AB$, $OE \perp CD$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + 0{,}5\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + 0{,}5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0{,}5\overrightarrow{OA} + 0{,}5\overrightarrow{OB}$. Аналогично $\overrightarrow{OE} = 0{,}5\overrightarrow{OC} + 0{,}5\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE} = 0{,}5(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

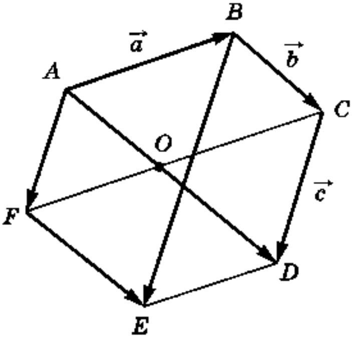

Рис. 60

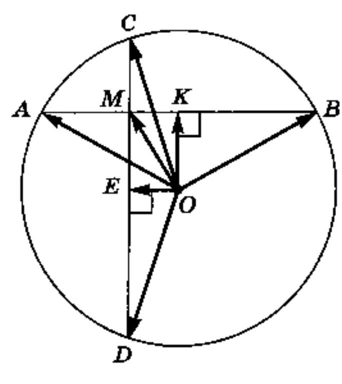

Рис. 61

С—36

Вар. 1. 1. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. 2. $\frac{1}{3}$.

Вар. 2. 1. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{p}$. 2. 15°, 165°, 165°.

Вар. 3. 2. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Вар. 5. 2. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Вар. 7. 1. Легко получить $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Имеем $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$. Отсюда $\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OE}$, т. е. точки K, O, E лежат на одной прямой и O — середина отрезка KE.

2. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M и пусть $\frac{BM}{MB_1} = \frac{m}{n}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB_1} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$ (1), $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA_1} = \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$ (2). Из выражений (1) и (2) следует, что $\frac{m}{2(m+n)} = \frac{k}{2}$ и $\frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}$. Отсюда $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$, т. е. $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$. Если предположить, что медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M_1, то аналогично можно доказать, что $\frac{BM}{M_1B_1} = \frac{2}{1}$. Следовательно, точки M и M_1 совпадут. Этим и доказывается данное положение.

Вар. 8. 1. $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BB_1}$. Отсюда $|\overrightarrow{CC_1}| \leqslant |\overrightarrow{DD_1}| + |\overrightarrow{BB_1}|$, т. е. $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA_1} - 2\overrightarrow{OB_1} = 2\overrightarrow{B_1A_1}$ (*), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = x\overrightarrow{CA_1} - y\overrightarrow{CB_1}$; $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CB_1}$. Из равенства (*) следует, что $x\overrightarrow{CA_1} - y\overrightarrow{CB_1} = 2\overrightarrow{CA_1} - 2\overrightarrow{CB_1}$; $(x-2)\overrightarrow{CA_1} = (y-2)\overrightarrow{CB_1}$. Отсюда $x = 2$ и $y = 2$. Это значит, что A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC, т. е. AA_1 и BB_1 — медианы.

С—37

Вар. 1. 1. 12 см и 8 см. 2. 14 см, 6 см, 10 см.
Вар. 2. 1. 10 см и 20 см. 2. 22 см, 16 см.
Вар. 3. 1. 3 см. 2. 5 см, 10 см.
Вар. 4. 1. 5 см. 2. 13 см, 9 см.
Вар. 5. 1. 2 см. *Вар.* 6. 1. 8 см.
Вар. 7. 1. 50 см. Докажем, что KL параллельна прямым BC и AD и находится на равном расстоянии от них. Пусть KL пересекает AB в точке P, а CD — в точке T. Тогда PT — средняя линия трапеции. Треугольники BKA и CLD прямоугольные, и $AB = 2 \cdot KP$, $CD = 2 \cdot LT$. Отсюда $P_{ABCD} = 50$ см. 2. 4 см и 16 см.

Вар. 8. 1. 18 см и 6 см. 2. Из прямоугольного треугольника DKO (рис. 62) находим $DK = R\sqrt{3}$ и $DO = 2R$, где R — радиус окружности. Из треугольника CPD имеем $DC = 2R$, $KC = 2R - R\sqrt{3}$. Необходимо учесть, что $CM = CK = 2R - R\sqrt{3}$, $AD = 3R$; $BC = R + 2R - R\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$. Так как средняя линия трапеции равна $6 - \sqrt{3}$, то $\frac{3R + 3R - R\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}$. Отсюда $R = 2$.

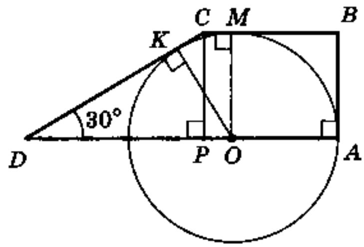

Рис. 62

С—38

Вар. 1. б) 4 см^2, 12 см.

Вар. 2. б) 6,1 см, 5,1 см, 4,3 см, 13,9 см^2.

Вар. 3. б) 20 см, 20 см^2.

Вар. 4. б) 94,4 см^2.

Вар. 5. а) Легко доказать, что $MB = KD = 2$ см и $MB \parallel KD$. Значит, $MBKD$ — параллелограмм. Далее проведем высоту ромба DE к стороне AB. Тогда из треугольника DBE $DE^2 = (2\sqrt{5})^2 - BE^2$, а из треугольника DAE $DE^2 = 5^2 - (5 - BE)^2$. Если точка E не попадает на отрезок AB, то $DE^2 = 5^2 - (BE - 5)^2 = 25 - (5 - BE)^2$, т. е. $20 - BE^2 = 25 - (5 - BE)^2$, откуда $BE = 2$ см. Значит, точки E и M совпадают и, следовательно, $\angle BMD = 90°$, т. е. $MBKD$ — прямоугольник. б) $DM = DE = 4$. Значит, периметр прямоугольника равен 12 см, а площадь 8 см^2.

Вар. 6. 1. 48°35′. 2. 12 см.

Вар. 7. 1. 12,9 см^2. Можно доказать, что треугольники ABC и ADC подобны, причем $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, т. е. $AC^2 = BC \cdot AD$, откуда $AC = 4$. Высота CE трапеции находится из прямоугольного треугольника BAE.

2. Пусть угол ABC равен x, тогда $\angle MCH = 180° - x$, $\angle MAH = x$; так как сумма углов четырехугольника $AMCH$ равна 360°, то $\angle MAH = \angle ABC$. Известно также, что две высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам параллелограмма, на которые они опущены. Тогда $\frac{AM}{CD} = \frac{AH}{BC}$ или $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{BC}$. Следовательно, треугольники MAH и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними. Их коэффициент подобия равен $MH : AC = 3 : 4$. Тогда искомое отношение равно 9 : 16.

Вар. 8. 1. 12,9 см^2. 2. 4 : 9. Задача решается аналогично задаче из варианта 7 С—38.

С—39

Вар. 1. 1. 60°. 2. 6 см. *Вар.* 3. 1. 90°. 2. $3\sqrt{3}$ см^2.

Вар. 2. 1. 90°. 2. 3 дм, 4 дм. *Вар.* 4. 1. 45°. 2. 54 см^2.

Вар. 5. 1. 60°. 2. Внутри трапеции. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, в которой $AD = 24$ см, $BC = 10$ см, высота BE равна 17 см. Окружность, описанная около трапеции, будет также описана около треугольника ABD. Можно доказать, что $AE = 7$ см, $ED = 17$ см. Тогда угол DBE равен 45°. Отложим на луче EA от точки E отрезок EK, равный 17 см. Тогда $\angle KBE = 45°$, а $\angle ABE < 45°$. Следовательно, $\angle ABD < 90°$. Таким образом, очевидно, что треугольник ABD является остроугольным. Значит, центр окружности, описанной около него, лежит внутри этого треугольника.

Вар. 6. 1. 60°. 2. Нет, не могут. Пусть $BD = x$, тогда из прямоугольных треугольников ABD и BCD находим $AB = 0{,}5x$, $AD = 0{,}5\sqrt{3}x$, $BC = x$, $CD = x\sqrt{2}$. Если предположить, что биссектрисы всех углов четырехугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке, то существует точка, равноудаленная от всех сторон четырехугольника, т. е. в этот четырехугольник можно вписать окружность. Следовательно, должно выполняться условие $AB + CD = BC + AD$. Но $0{,}5x + x\sqrt{2} \neq x + 0{,}5\sqrt{3}x$. Значит, наше предположение неверно и биссектрисы в одной точке не пересекаются.

Вар. 7. Примем радиус окружности с центром в точке O_1 за 1, а с центром в точке O_2 — за x (рис. 63). Тогда радиус полукруга равен 3, $OO_1 = 2$, $OO_2 = 3 - x$. Из $\triangle O_1EO$ имеем $OE = \sqrt{3}$, а из $\triangle O_2FO$ имеем $OF = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$; $EF = OE + OF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$. Рассмотрим треугольник O_1KO_2 ($O_1K \perp O_2F$): $O_2O_1 = 1 + x$, $O_2K = x - 1$, $O_1K = EF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$. Тогда, используя теорему Пифагора, имеем $(\sqrt{3} + \sqrt{9-6x})^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2$. Отсюда $3\sqrt{3-2x} = 5x - 6$ и $25x^2 - 42x + 9 = 0$. Учитывая, что $x > \frac{6}{5}$, получаем $x = \frac{21 + 6\sqrt{6}}{25}$.

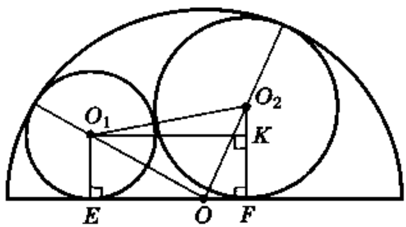

Рис. 63

Вар. 8. Пусть в некоторый треугольник MPN вписана окружность и пусть $PN = m$. Тогда расстояние от вершины до точек касания окружности со сторонами MP и MN равно $p - m$, где p — полупериметр $\triangle MPN$. В нашем случае, используя этот факт, имеем

$$BE = \frac{AB + BD + a}{2} - a,\ BF = \frac{BC + BD + b}{2} - b,$$

$$EF = |BE - BF| = \left| \frac{AB + BD - a}{2} - \frac{BC + BD - b}{2} \right| = \frac{|b - a|}{2}.$$

Контрольные работы

К—1

Вар. 1. **1.** 120°, 60°. **3.** а) Прямоугольник. **4.** Сумма отмеченных углов равна сумме углов пятиугольника $ACEKT$, т. е. 540°.

Вар. 2. **3.** а) Ромб; б) 40°. **4.** Сумма углов выпуклого шестиугольника равна 720°. Сумма четырех острых углов меньше 360°. Значит, сумма двух оставшихся углов больше 360°, чего быть не может.

Вар. 3. **3.** б) Пятиугольник. **4.** Сумма отмеченных углов равна сумме углов шестиугольника $ACEHNO$.

Вар. 4. **4.** n-угольник может быть четырехугольником, в котором один из углов равен 1°. Докажем, что $n = 4$. n не может быть равно 3, так как сумма углов треугольника всего лишь 180°. При $n \geqslant 5$ сумма углов n-угольника не меньше 720°. Тогда n-й угол будет больше 361°, чего быть не может. Значит, $n = 4$.

К—2

Вар. 1. **1.** 108 см^2. **2.** 75 см^2. **3.** а) $3\sqrt{3}$ см^2; б) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ см^2. **4.** Если равны площади четырехугольников $ABDE$ и $ACDE$, то равны и площади треугольников ABD и ACD. Значит, точки B и C равноудалены от прямой AD, откуда следует, что $BC \parallel AD$.

Вар. 2. **1.** 56 см^2. **2.** 102 см^2. **3.** а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) $4\sqrt{3}$ см^2. **4.** Задача решается аналогично задаче 4 из варианта 1.

Вар. 3. **1.** 32 см^2. **2.** 75 см^2. **3.** а) $\frac{120}{13}$ дм; б) 15 дм^2. **4.** Задача решается аналогично задаче 4 из варианта 1.

Вар. 4. **1.** 150 см^2. **2.** $\frac{225}{2}$ см^2. **3.** а) $\frac{246}{5}$ см^2; б) 3 см^2.

К—3

Вар. 1. **1.** б) 9 : 1. **2.** б) 3 : 1. **3.** Можно доказать, что $\frac{AO}{OE} = \frac{DK}{CK}$, но $\frac{AB}{BE} = \frac{AO}{OE}$, так как луч BO — биссектриса угла ABE. Значит, $\frac{AB}{BE} = \frac{3}{2}$.

Вар. 2. **1.** а) 15 см; б) 1 : 9. **2.** 13 : 4. **3.** $\frac{3}{4}$. Задача решается аналогично задаче 3 из варианта 1.

Вар. 3. **1.** б) 4 : 1. **2.** б) $\frac{4}{5}$. **3.** Треугольники MBK и ABC подобны по двум углам. Значит, $\frac{BC}{AB} = \frac{MB}{BK}$, но $\frac{MB}{BK} = \frac{MO}{OK} = \frac{2}{3}$, так как BO — биссектриса треугольника MBK.

Вар. 4. **1.** а) 1 : 2; б) 1 : 9. **2.** б) 1 : 5. **3.** Задача решается аналогично задаче 3 из варианта 3.

К—4

Вар. 1. **1.** $\frac{2}{3}$, 15 мм. **3.** а) 45°; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4*.** Пусть внешний прямоугольник имеет измерения a и b ($a > b$), а ширина рамки равна c. Тогда для подобия внешнего и внутреннего прямоугольников рамки должно выполняться одно из условий: $\frac{b-2c}{b} = \frac{a-2c}{a}$ или $\frac{b-2c}{a} = \frac{a-2c}{b}$. Можно доказать, что выполнение этих равенств невозможно.

Вар. 2. **1.** 20 дм, $\frac{4}{5}$. **3.** а) 3 см; б) $3\sqrt{3}$ см. **4*.** Пусть данный прямоугольник имеет измерения a и b. Тогда для подобия образовавшегося прямоугольника и данного должно выполняться одно из условий: $\frac{a}{2b} = \frac{a}{b}$ или $\frac{a}{2b} = \frac{b}{a}$. Последнее условие выполняется при $a = \sqrt{2}b$, что говорит о том, что образовавшийся и данный прямоугольники могут быть подобными.

Вар. 3. **1.** 2 дм, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 45°; б) $4\sqrt{2}$. **4*.** Пусть квадрат со стороной a разрезан на два прямоугольника со сторонами a, b и $a - b$, a. Для подобия этих прямоугольников должно выполняться одно из условий: $\frac{a}{b} = \frac{a}{a-b}$ или $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{a}$. Можно доказать, что эти равенства невозможны.

Вар. 4. **1.** 15 см, $\frac{3}{5}$. **3.** а) 12 см; б) $\frac{28}{\sqrt{3}}$ см. **4*.** Пусть прямоугольник со сторонами a и b разрезан на прямоугольники со сторонами b, c и $a - c$, b. Для того чтобы образовавшиеся прямоугольники были подобны, должно выполняться одно из условий: $\frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ или $\frac{b}{c} = \frac{a-c}{b}$. Последнее условие может выполняться, например, при $a = 2{,}5$, $b = 1$, $c = 2$, что говорит о том, что образовавшиеся прямоугольники могут быть подобными.

К—5

Вар. 1. **1.** 1 см. **2.** 30°, 12 см. **3.** а) 5 см; б) 4,1 см. **4.** Через точку O проведем лучи AO и BO, пересекающие окружность в точках M и H соответственно. Пусть прямые AH и BM пересекаются в точке O. Можно доказать, что $\angle AHB = \angle AMB = 90°$. Тогда искомый перпендикуляр лежит на прямой CO.

Вар. 2. **1.** 2 см. **2.** 2 см, 90°, 45°. **3.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) 15° или 75°. **4.** Построим окружность с диаметром $BD = ET$ и окружность с центром в точке B и радиусом, равным отрезку PO. Пусть вторая окружность пересекает первую в точках A и C. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым.

Вар. 3. **1.** $\sqrt{3}$ см. **2.** 4 см, 135°. **3.** а) $22\sqrt{2}$ см; б) $72\sqrt{2}$. **4.** Задача решается аналогично задаче 4 из варианта 1.

Вар. 4. **1.** $4\sqrt{2}$ см, 4 см, 4 см. **2.** 4 см, 15°. **3.** а) 4 см; б) 30°, 150°. **4.** Задача решается аналогично задаче 4 из варианта 2.

К—6

Вар. 1. **2.** а) $\overrightarrow{MB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AC}$; г) пусть точка T — середина отрезка BB_1. Тогда $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AT}$. Значит, точки A, T, A_1 лежат на одной прямой.

Вар. 2. **2.** а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{AO} = 1{,}5\overrightarrow{DM} - 1{,}5\overrightarrow{DE}$; г) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Значит, $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$, так как векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$ неколлинеарны.

Вар. 3. **2.** а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{OD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$; г) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$. Значит, $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AD$, так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарны.

Вар. 4. **2.** а) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$; г)* $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$. С другой стороны, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OE}$. Следовательно, $OD = 5OM$. Значит, точки O, D, M лежат на одной прямой.

К—7

Вар. 1. **1.** а) $14\sqrt{3}$; б) 120°, 60°; в) 7; г) нет; д) нет; е) да; ж) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$. **2.** Примите данный отрезок за единицу и постройте прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2.

Вар. 2. **1.** а) $4\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 4 : 1; г) $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}$; д) можно; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$; ж) $\frac{2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$. **2.** Пусть дан отрезок PO. Отложим на некоторой прямой последовательно два отрезка $AB = 3PO$ и

$BC = 4PO$. Построим полуокружность с диаметром AC. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную AC, которая пересечет полуокружность в точке D. Отрезок BD будет искомым.

Вар. 3. 1. а) 30°, 120°, 60°; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $2\sqrt{3}$; в) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$; г) 90°; 60°; 90°, 120°; ж) $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$. 2. Решается аналогично задаче 2 из варианта 2.

Вар. 4. 1. а) 1 : 9; б) 4; в) 3,5; г) нет; д) $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{CA}$; е) $\frac{\sqrt{26}}{26}$; ж) 90°, 135°, 135°. 2. Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному данному отрезку, и прилежащему углу в 30°. Другой катет и будет искомым отрезком.

Задачи повышенной трудности

1. Пусть треугольник ABC тупоугольный (угол C тупой) и CM — его медиана. Обозначим $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ и $CM = m$. Продолжим CM за точку M и отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ADBC$ — параллелограмм и $AD = a$. Очевидно, что

$$2m < a + b. \qquad (1)$$

Кроме того, из условия следует, что $DC < AB$, т. е. $m < \frac{c}{2}$ и

$$2m < c. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $4m < a + b + c$ и $m < \frac{P}{4}$.

2. Через вершину C проведем прямую, параллельную AB и пересекающую AD в точке K. По условию $BC + CD = AK + KD$; $AK = BC$. Тогда $KD = CD$. В таком случае $\angle KCD = \angle CKD$. Кроме того, $\angle BAD = \angle CKD$. Так как $AC = CD$, то $\angle D = \angle CAK$. В силу того что $AB = BC$, можно утверждать, что $ABCD$ — ромб и $\angle CAK = \frac{1}{2}\angle BAD$. Обозначим $\angle BAD$ через x. Тогда $\angle D = \angle CAK = \frac{x}{2}$ и $\angle KCD = \angle CKD = x$. Из треугольника KCD следует, что $x + x + \frac{x}{2} = 180°$ и $x = 72$. В таком случае $\angle BAD = 72°$. Остальные углы находятся элементарно.

Ответ. 72°, 108°, 144°, 36°.

3. Через точку E проведем прямую, параллельную AD и пересекающую другую секущую в точке K. Так как $KE \parallel AD$, то $\angle ABC = \angle CKE$. Из того, что $AB = AC$, следует, что $\angle ABC = \angle ACB$. В таком случае $\angle CKE = \angle KCE$ и $KE = CE$. Треугольники MBD и MKE подобны: $\frac{BD}{KE} = \frac{MD}{ME}$, отсюда по доказанному $KE = CE$. Тогда $\frac{BD}{CE} = \frac{MD}{ME}$.

4. Рассмотрим треугольники AOD и ACD (O — точка пересечения диагоналей): $\angle ACD = \angle BDA$, $\angle CAD$ — общий. Отсюда следует, что $\triangle AOD \sim \triangle ACD$ и

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AD}{AC}. \qquad (1)$$

Аналогично $\triangle CBO \sim \triangle ABC$ и

$$\frac{CO}{BC} = \frac{BC}{AC}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $AD^2 = AO \cdot AC$ и $BC^2 = CO \cdot AC$. Тогда $AD^2 + BC^2 = AC\,(AO + AC) = AC^2$, что и требовалось доказать.

5. Проведем через точку D прямую, которая параллельна BF и пересекает AC в точке K. Легко доказать, что $AF = FK = KC$. Тогда $S_{DKC} = \frac{1}{3}S_{ADC} = \frac{1}{6}S$, $S_{AKD} = \frac{S}{2} - \frac{S}{6} = \frac{S}{3}$, $S_{AMF} = \frac{1}{4}S_{AKD} = \frac{S}{12}$.

Ответ. $\frac{S}{12}$.

6. Пусть AC пересекает среднюю линию EM в точке F и $\frac{EF}{FM} = k$. Обозначим

$$S_{AEF} = S_1,\ S_{EBCF} = S_2,\ S_{FCM} = S_3 \text{ и } S_{AFMD} = S_4.$$

Очевидно, что $S_2 + S_3 = S$; $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (коэффициент подобия $\frac{1}{2}$). Тогда $\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{4}{1}$ и $S_2 = 3S_1$. Аналогично $S_4 = 3S_3$. Треугольники AEF и FCM имеют равные высоты и $\frac{S_1}{S_3} = \frac{EF}{FM} = k$. Тогда

$S_1 = kS_3$; $S = S_2 + S_3 = 3S_1 + S_3 = 3kS_3 + S_3 = (3k+1)S_3$; $S_3 = \frac{S}{3k+1}$;

$$S_{\text{трап}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + 3S_1 + S_3 + 3S_3 = 4S_1 + 4S_3 =$$
$$= 4\,(S_1 + S_3) = 4\,(kS_3 + S_3) = 4\,(k+1)\,S_3 = \frac{4\,(k+1)}{3k+1}S.$$

Ответ. $\frac{4\,(k+1)}{3k+1}S$.

7. Пусть M — середина AB и N — середина CB. Положим, что $AN = k\sqrt{17}$ и $CM = k\sqrt{5}$ ($k > 0$). Тогда $AB = 2k\sqrt{5}$; $AC = x$; $CN = \sqrt{AN^2 - AC^2} = 17k^2 - x^2$; $BC = 2\sqrt{17k^2 - x^2}$; $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Отсюда $4{,}5k^2 = x^2 + 4\,(17k^2 - x^2)$, $x = 4k$. Тогда $AC = 4k$ и $BC = 2k$ и $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$.

Ответ. 1 : 2.

8. В прямоугольном треугольнике ABC высота $CD = h = \frac{ab}{c}$, а проекции катетов на гипотенузу $m = \frac{b^2}{c}$ и $n = \frac{a^2}{c}$.

$P_{ADC} = m + b + \frac{ab}{c}$, $\quad P_{DBC} = n + a + \frac{ab}{c}$.

$$\frac{m}{P_{ADC}}+\frac{n}{P_{DBC}}+\frac{c}{P_{ABC}}=\frac{b^2}{c\left(m+b+\frac{ab}{c}\right)}+\frac{a^2}{c\left(n+a+\frac{ab}{c}\right)}+\frac{c}{a+b+c}=$$

$$=\frac{b^2}{c\left(\frac{b^2}{c}+b+\frac{ab}{c}\right)}+\frac{a^2}{c\left(\frac{a^2}{c}+a+\frac{ab}{c}\right)}+\frac{c}{a+b+c}=$$

$$=\frac{b^2}{b^2+bc+ab}+\frac{a^2}{ac+a^2+ab}+\frac{c}{a+b+c}=$$

$$=\frac{b}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1,$$

что и требовалось доказать.

9. Диаметр вписанной окружности $d=a+b-c$, где a и b — катеты треугольника.

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant a^2+b^2+a^2+b^2=2c^2.\quad\left(\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab.\right)$$

Отсюда $a+b\leqslant c\sqrt{2}$. Тогда

$$d=a+b-c\leqslant c\sqrt{2}-c=c(\sqrt{2}-1),$$

что и требовалось доказать.

10. Пусть катеты треугольника a и b, а гипотенуза c. В треугольнике ACK CE — биссектриса, а потому

$$\frac{AE}{EK}=\frac{AC}{CK}. \tag{1}$$

Проекция катета AC на гипотенузу $AK=\frac{b^2}{c}$. Тогда $EK=$ $=\frac{b^2}{c}-AE$; $h=CK=\frac{ab}{c}$. Из (1) следует, что $\dfrac{AE}{\frac{b^2}{c}-AE}=\dfrac{b}{\frac{ab}{c}}$. Отсюда

$$AE=\frac{b^2}{a+c};\qquad BE=AB-AE=c-\frac{b^2}{a+c}=\frac{ac+c^2-b^2}{a+c}=\frac{ac+a^2}{a+c}=a,$$

т. е. $BE=CB$, что и требовалось доказать.

11. Продолжим AP до пересечения с CB в точке K. Опустим из точек B и C перпендикуляры BE и CF на прямую AP. Треугольники ABP и ACP равновелики и имеют общее основание AP. В таком случае их высоты BE и CF равны. Прямоугольные треугольники BEK и CFK равны по катету и острому углу ($\angle BKE=\angle CKF$). Отсюда следует, что $BK=KC$, т. е. AK — медиана. Аналогично можно доказать, что P лежит на медиане BM. Следовательно, P — точка пересечения медиан треугольника.

12. Из центров окружностей O_1 и O_2 проведем радиусы O_1B и O_2C в точки касания (рис. 64): $O_1B\perp m$ и $O_2C\perp n$, но $m\parallel n$ и $O_1B\parallel O_2C$. $\angle AO_1B=2\alpha$ и $\angle AO_2C=2\beta$ (свойства углов, составленных касательной и хордой). Так как $O_1B\parallel O_2C$, то $\angle AO_1B+$ $+\angle AO_2C=180°$, т. е. $2\alpha+2\beta=180°$ и $\alpha+\beta=90°$, но $\angle AMB=$

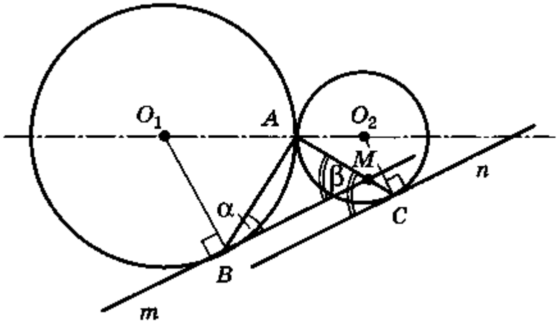

Рис. 64

$= \angle ACP = \beta$. Следовательно, треугольник BAM прямоугольный и угол BAC прямой.

13. На рисунке 65 углы CAB и DAB составлены касательной и хордой. Поэтому $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile AnB$ и $\angle DAB = \frac{1}{2} \smile AmB$. Так как углы ACB и ADB вписанные, то $\angle ACB = \frac{1}{2} \smile AmB$ и $\angle ADB = \frac{1}{2} \smile AnB$. Следовательно, $\angle ACB = \angle DAB$ и $\angle CAB = \angle ADB$. Из этого следует, что $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ и $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} = \frac{BC}{AB}$. Из этих равенств имеем $AC \cdot DB = AB \cdot DA$ и $AD \cdot BC = AB \cdot AC$.

Обе части первого равенства умножим на AC, а второго — на AD. Тогда $AC^2 \cdot DB = AB \cdot DA \cdot AC$ и $AD^2 \cdot BC = AB \cdot AC \cdot DA$. Из последних двух равенств вытекает, что $AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC$.

14. На рисунке 66 окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются прямой m в точках A и B; $O_1A \perp m$ и $O_2B \perp m$. Следовательно, $O_1A \parallel O_2B$. Пусть $\angle AO_1M = \alpha$. Тогда $\angle BO_2M = 180° - \alpha$. Треугольники AO_1M и BO_2M равнобедренные и $\angle AMO_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$, а $\angle BMO_2 = \frac{\alpha}{2}$. $\angle AMB = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 90°$. Следовательно, точка M принадлежит окружности с диаметром, равным AB.

Ответ. Окружность с диаметром, равным AB.

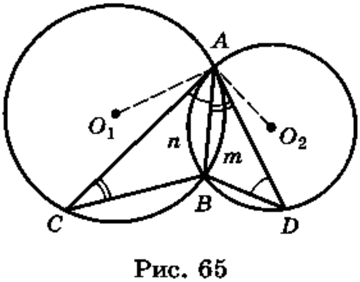

Рис. 65

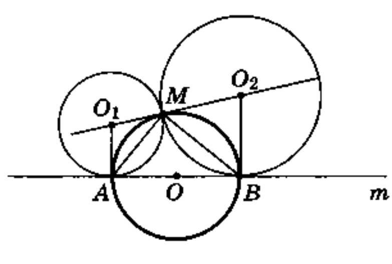

Рис. 66

15. Пусть радиус окружности равен R (рис. 67). Имеем:

$$(AB + AC)(AB + BC) =$$
$$= AB^2 + AC \cdot AB + AB \cdot BC + AC \cdot BC =$$
$$= AB(AB + AC + BC) + AC \cdot BC;$$
$$AC + BC + AB =$$
$$= MC - MA + CN - BN + AB =$$
$$= 2R - AK - BK + AB = 2R.$$

Было использовано то, что $MA = AK$ и $BN = BK$. Тогда

$$(AB + AC)(AB + BC) =$$
$$= AB \cdot 2R + AC \cdot BC.$$

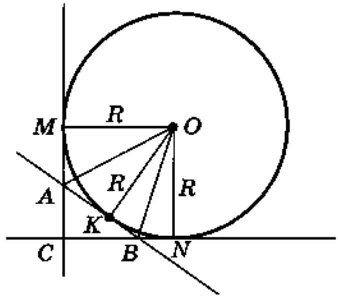

Рис. 67

Площадь квадрата $OMCN$ равна R^2. Она равна сумме площадей треугольников AOB, ONB, OMA и ABC:

$$\frac{1}{2}AB \cdot R + \frac{1}{2}R(R - BC) + \frac{1}{2}R(R - AC) + \frac{AC \cdot BC}{2} = R^2.$$

Отсюда следует, что $AC \cdot BC = R(BC + AC - AB)$. В таком случае

$$(AB + AC)(AB + BC) = 2AB \cdot R + R(BC + AC - AB) =$$
$$= R(2AB + BC + AC - AB) = R(AB + AC + BC) = 2R^2$$

и не зависит от положения точки K.

16. Пусть центры окружностей O_1 и O_2, а точка их касания K. Точки O_1, K и O_2 лежат на одной прямой и $O_1O_2 = R_1 + R_2$ есть средняя линия трапеции, тогда $AD + BC = 2R_1 + 2R_2$; $AB = 2R_1$, и $CD = 2R_2$. Тогда $AD + BC = AB + CD$ и в трапецию можно вписать окружность.

17. Рассмотрим треугольник BDC: $\angle DBC = 20°$, $\angle C = 40°$. Тогда $\angle BDC = 120°$ и $BC > BD$. На стороне BC откладываем отрезок BE, равный BD. Докажем, что $EC = AD$. В треугольнике DBE $BD = BE$ и $\angle BDE = \angle BED = 80°$. Тогда $\angle EDC = 120° - 80° = 40° = \angle DCE$. Отсюда $EC = DE$; $ADE = 180° - 40° = 140°$, а так как $\angle ABE = 40°$, то $\angle ADE + \angle ABE = 180°$. Это значит, что вокруг четырехугольника $ABED$ можно описать окружность; $\angle AED = \angle ABD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\angle AED = 20°$. Аналогично $\angle DAE = 20°$. В таком случае треугольник ADE равнобедренный и $AD = DE = EC$. Тогда $BC = BE + EC = BD + AD$.

18. Пусть E и F — середины противоположных сторон AB и CD четырехугольника.

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}),$$

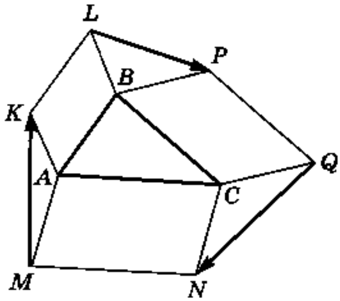

Рис. 68

так как $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$. По условию $EF = \dfrac{BC + AD}{2}$. Мы получили, что $|\overrightarrow{EF}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}| = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}|)$. Это возможно только в том случае, если $BC \upuparrows AD$, так как $BC \parallel AD$ и $ABCD$ — трапеция, что и требовалось доказать.

19. Рассмотрим сумму векторов $\overrightarrow{LP}$, $\overrightarrow{QN}$ и $\overrightarrow{MK}$ (рис. 68): $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}$. Из условия следует, что $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BL}$ и $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$. В таком случае $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{MK} = \vec{0}$. Этим и доказывается, что из отрезков KM, LP и QN можно составить треугольник.

20. Пусть биссектрисы AE, BF и CD треугольника ABC пересекаются в точке O и пусть $\dfrac{AO}{OE} = \dfrac{BO}{OF} = \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{m}{n}$. Тогда

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AF} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$2\overrightarrow{AO} = \dfrac{m+2n}{2(m+n)}\overrightarrow{AB} + \dfrac{m+2n}{2(m+n)}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO} = \dfrac{m+2n}{4(m+n)}\overrightarrow{AB} + \dfrac{m+2n}{4(m+n)}\overrightarrow{AC}$.

Пусть $\dfrac{m+2n}{4(m+n)} = k$. Тогда $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Аналогично $\overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{BE}$. Имеем $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$, или $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника, которая совпадает с точкой пересечения биссектрис. Следовательно, треугольник ABC равносторонний.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зив Борис Германович
Мейлер Вениамин Михайлович

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

8 КЛАСС

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художники *Е. М. Молчанов, О. П. Богомолова, Е. В. Соганова*
Технический редактор *С. В. Щербакова*
Корректоры *Г. П. Быстрова, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 13.01.10. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,62. Тираж 20 000 экз. Заказ № 29560.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 97[illegible]024155-7
[illegible]785090 241[illegible]57